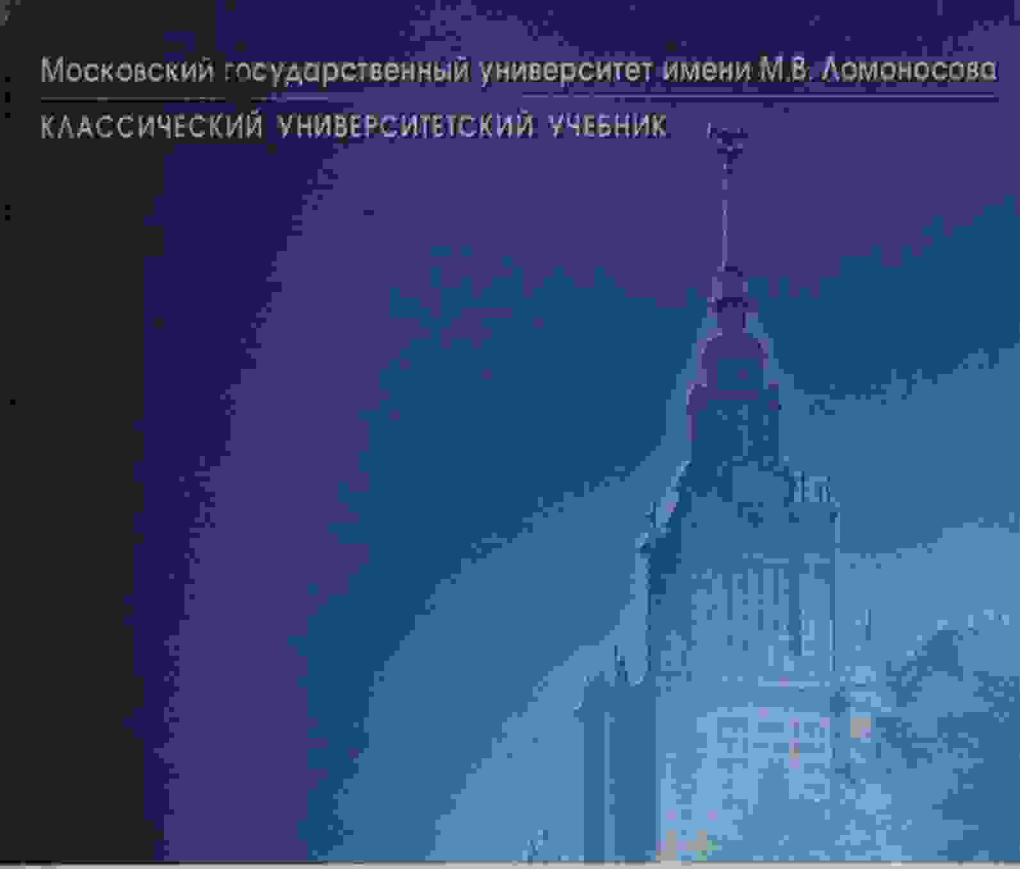
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК



В.А. Ильин, Г.Д. Ким

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

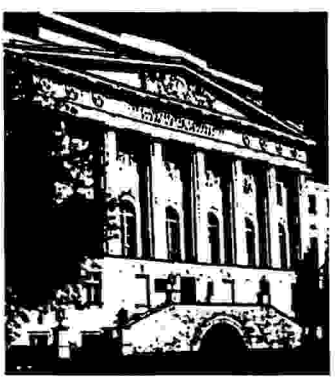
3-е издание

Серия

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена

250-летию Московского университета



КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Редакционный совет серии:

Председатель совета
ректор Московского университета
В.А. Садовничий

Члены совета:

Виханский О.С., Голиченков А.К., Гусев М.В.,
Добреньков В.И., Донцов А.И., Засурский Я.Н.,
Зинченко Ю.П. (ответственный секретарь),
Камзолов А.И. (ответственный секретарь),
Карпов С.П., Касимов Н.С., Колесов В.П.,
Лободанов А.П., Лунин В.В., Лупанов О.Б.,
Мейер М.С., Миронов В.В. (заместитель председателя),
Михалев А.В., Моисеев Е.И., Пушаровский Д.Ю.,
Раевская О.В., Ремнева М.Л., Розов Н.Х.,
Салецкий А.М. (заместитель председателя),
Сурин А.В., Тер-Минасова С.Г.,
Ткачук В.А., Третьяков Ю.Д., Трухин В.И.,
Трофимов В.Т. (заместитель председателя), Шоба С.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В.А. Ильин, Г.Д. Ким

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

3-е издание, переработанное и дополненное

Учебник удостоен премии Президента Российской Федерации в области образования

Издательство Проспект
Издательство Московского университета
2007

ЗБК
И-453

Научная библиотека МГУ

67006813

УДК [512.8+516.0](075.8)
ББК 22.12я73
И45

Рецензенты:
академик РАН *С. М. Никольский*,
академик РАН *В. В. Воеводин*

Ильин В. А., Ким Г. Д.

И45 Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2007. – 400 с.

ISBN-10 5-482-01216-6
ISBN-13 978-5-482-01216-1

Книга представляет собой учебник по объединенному курсу линейной алгебры и аналитической геометрии, в основу которого легли лекции, читавшиеся авторами в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. В изложении материала, вполне традиционного по своей тематике, авторы придерживаются тенденции объединения двух математических дисциплин в одну, добиваясь лаконичности геометрических доказательств и наглядности алгебраических абстракций. Наряду с традиционными темами книга содержит сведения из общей алгебры, элементы теории множеств, метрических и нормированных пространств. Особое внимание уделяется вычислительным аспектам алгебраических методов.

Для студентов университетов и вузов, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика», «Информатика».

УДК [512.8+516.0](075.8)
ББК 22.12я73

Учебное издание

Ильин Владимир Александрович,
Ким Галина Динховна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебник

Художественное оформление серии выполнено
Издательством Московского университета и Издательством Проспект
по заказу Московского университета.

Подписано в печать 01.10.06. Формат 60 x 90 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 25,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 2300.

ООО «ТК Велби»
107120, г. Москва, Хлебников пер., д. 7, стр. 2.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени
полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА МГУ 7

© В. А. Ильин, Г. Д. Ким, 2007
© ООО «Издательство Проспект», 2007
© МГУ им. М. В. Ломоносова, художественное оформление, 2007

ISBN-10 5-482-01216-6
ISBN-13 978-5-482-01216-1

Предисловие

Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает свыше 250 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов, редакционным советом серии и издаваемых к юбилею по решению Ученого совета МГУ.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования.

Высокий уровень образования, которое дает Московский университет, в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах аккумулируется бесценный опыт методики и методологии преподавания, который становится достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует тот вклад, который вносит Московский университет в классическое университетское образование в нашей стране и, несомненно, служит его развитию.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах науки и образования. Это служит также свидетельством того, что 250-летний юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны, мирового образовательного сообщества.

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор *В. А. Садовничий*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ... 12

Предисловие к третьему изданию ... 13

Литература ... 14

Глава I. **Матрицы** ... 15

§ 1. Понятие матрицы ... 15

Терминология и обозначения. Компактная форма записи матрицы. Матрицы специального вида

§ 2. Операции над матрицами ... 18

Равенство матриц. Линейные операции. Умножение матриц. Транспонирование матрицы. Некоторые свойства операций

§ 3. Элементарные преобразования матриц ... 22

Приведение матрицы к ступенчатой форме. Приведение к трапециевидной форме. Приведение к треугольной форме. Матрицы элементарных преобразований

§ 4. Определители ... 25

Перестановки. Построение определителя n-го порядка. Простейшие свойства определителя. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке (столбцу). Определитель квазитреугольной матрицы. Вычисление определителя

§ 5. Обратная матрица ... 36

Условие обратимости. Некоторые свойства обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы. Приведение к диагональной форме. LU-разложение матрицы

Глава II. **Теоретико-множественные понятия** ... 42

§ 6. Множества ... 42

§ 7. Эквивалентность ... 43

Бинарное отношение. Отношение эквивалентности

§ 8. Отображения ... 46

Определение, простейшие свойства. Произведение отображений. Обратное отображение. Перестановки (подстановки) n-го порядка

§ 9. Алгебраические законы ... 50

Внутренний закон композиции. Обобщенная ассоциативность. Внешний закон композиции

Глава III. **Геометрические векторы** 54
§ 10. Направленные отрезки 55
§ 11. Свободный вектор 57
Определение и терминология. Линейные операции над векторами
§ 12. Векторы на прямой, на плоскости и в пространстве 60
Глава IV. **Введение в теорию линейных пространств** 62
§ 13. Вещественное линейное пространство 62
Определение. Примеры. Простейшие свойства линейных пространств
§ 14. Линейная зависимость 65
§ 15. Геометрический смысл линейной зависимости 68
§ 16. Ранг матрицы 70
Ранг матрицы и линейная зависимость. Ранг матрицы и элементарные преобразования. Метод Гаусса вычисления ранга. Эквивалентные матрицы. Скелетное разложение матрицы
§ 17. Базис и размерность 76
Определения. Примеры. Координаты вектора. Переход к другому базису
§ 18. Линейное подпространство и линейное многообразие 80
Линейное подпространство. Линейное аффинное многообразие
Глава V. **Векторная алгебра** 83
§ 19. Координаты вектора 83
§ 20. Координаты точки 84
Аффинная система координат. Деление отрезка в данном отношении. Прямоугольные координаты
§ 21. Проекции вектора и координаты 86
Проекции вектора на плоскости. Проекции вектора в пространстве
§ 22. Скалярное произведение 88
Определение и основные свойства. Скалярное произведение в координатах
§ 23. Векторное и смешанное произведения 91
Ориентация в вещественном линейном пространстве. Определения и основные свойства. Векторное и смешанное произведения в прямоугольных координатах
§ 24. Преобразование координат 95
Преобразование аффинной системы координат. Ортогональная матрица. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат в пространстве

§ 25. Полярные координаты 101
Полярные координаты на плоскости. Полярные координаты в пространстве

Глава VI. **Системы линейных алгебраических уравнений** 104
§ 26. Постановка задачи 104
Терминология. Компактная запись системы. Эквивалентность систем
§ 27. Системы с квадратной невырожденной матрицей. Правило Крамера 105
§ 28. Системы общего вида 106
Совместность системы. Схема исследования совместной системы. Общее решение системы. Однородные системы
§ 29. Метод Гаусса исследования и решения систем 109
Системы с трапециевидной матрицей. Элементарные преобразования системы уравнений. Приведение системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей
§ 30. Геометрические свойства решений системы 112
Линейное подпространство решений однородной системы. Общее решение однородной системы. Линейное многообразие решений неоднородной системы. Общее решение неоднородной системы

Глава VII. **Алгебраические линии и поверхности первого порядка** 116
§ 31. Понятие об уравнениях линии и поверхности 116
§ 32. Уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве 117
Канонические уравнения. Параметрические уравнения. Общие уравнения. Уравнения в отрезках. Векторные уравнения
§ 33. Взаимное расположение прямых на плоскости (плоскостей в пространстве) 123
Взаимное расположение двух прямых (плоскостей). Пучок прямых (плоскостей)
§ 34. Полуплоскости и полупространства 126
§ 35. Прямая на плоскости (плоскость в пространстве) в прямоугольной декартовой системе координат 128
Расстояние от точки до прямой (до плоскости). Угол между прямыми (между плоскостями)
§ 36. Прямая в пространстве 129
Уравнения прямой. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Метрические задачи в прямоугольной декартовой системе координат

Глава VIII. **Элементы общей алгебры** 135
§ 37. Группа 135

§ 38. Подгруппа 137
Определение. Примеры. Группа невырожденных верхних (нижних) треугольных матриц. Группа ортогональных матриц. Произведение подмножеств группы. Смежные классы
§ 39. Конечная группа 140
Основные свойства. Симметрическая группа n-го порядка. Знакопеременная группа n-го порядка. Циклическая группа. Порядок элемента
§ 40. Нормальный делитель 144
Определение и свойства. Фактор-группа. Группа вычетов по модулю p
§ 41. Морфизмы групп 145
Изоморфизм. Гомоморфизм
§ 42. Кольцо 148
Определение, простейшие свойства. Делители нуля. Кольцо вычетов. Подкольцо
§ 43. Поле 151
Определение, простейшие свойства. Расширение поля. Изоморфизм колец и полей. Характеристика поля. Поле вычетов

Глава IX. **Комплексные числа** 156
§ 44. Поле комплексных чисел 156
Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексная плоскость. Сопряженная матрица
§ 45. Тригонометрическая форма комплексного числа 159
§ 46. Возведение в степень и извлечение корня 162
Возведение в степень. Извлечение корня. Геометрическая интерпретация корней. Группа корней n-й степени из единицы

Глава X. **Многочлены над произвольным полем** 165
§ 47. Кольцо многочленов 165
§ 48. Деление многочленов 168
§ 49. Корни многочленов 170
§ 50. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел 174
§ 51. Многочлены над полем вещественных чисел 177

Глава XI. **Алгебраические линии второго порядка на плоскости** 180
§ 52. Эллипс 180
Каноническое уравнение. Директориальное свойство
§ 53. Гипербола 184
Каноническое уравнение. Директориальное свойство

§ 54. Парабола 187
Каноническое уравнение
§ 55. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе 189
§ 56. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы 190
§ 57. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы 192
§ 58. Общее уравнение линии второго порядка 193
Компактная запись общего уравнения. Характеристический многочлен. Преобразования общего уравнения. Метод вращений
§ 59. Классификация линий второго порядка на плоскости 200
Канонические уравнения. Метод Лагранжа

Глава XII. **Линейное пространство над произвольным полем** 207
§ 60. Определение и терминология 207
Примеры. Точки в линейном пространстве
§ 61. Линейная зависимость. Ранг и база системы векторов 210
§ 62. Базис и размерность 211
§ 63. Изоморфизм линейных пространств 213
§ 64. Линейные подпространства. Линейная оболочка 214
§ 65. Сумма и пересечение линейных подпространств 216
§ 66. Прямая сумма подпространств 218
Критерии прямой суммы. Дополнительное подпространство
§ 67. Линейное аффинное многообразие 220
Параллельные многообразия. Пересечение многообразий. Фактор-пространство

Глава XIII. **Евклидовы и унитарные пространства** 224
§ 68. Скалярное произведение 224
§ 69. Основные метрические понятия 226
§ 70. Ортогональные векторы 228
Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации. Ортогональная (унитарная) матрица. QR-разложение. Теорема Пифагора и ее обобщение
§ 71. Матрица Грама 232
§ 72. Ортогональное дополнение 233
Задача о перпендикуляре. Решение задачи о перпендикуляре
§ 73. Линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве 236
§ 74. Расстояние в евклидовом (унитарном) пространстве 237
§ 75. Изометрия 239

Глава XIV. **Линейные операторы** 240
§ 76. Определение и простейшие свойства 240
Терминология, примеры. Задание линейного оператора

§ 77. Матрица линейного оператора 242
Построение матрицы линейного оператора. Координаты вектора и его образа. Матрицы оператора в различных базисах
§ 78. Линейное пространство операторов 244
§ 79. Умножение линейных операторов 245
§ 80. Образ и ядро линейного оператора 246
§ 81. Линейные формы 248
Определение и свойства. Линейные формы и гиперплоскость Сопряженное пространство. Специальное представление линейной формы в евклидовом (унитарном) пространстве
§ 82. Алгебра линейных операторов, действующих в одном пространстве 250
§ 83. Обратный оператор 251
Глава XV. Структура линейного оператора в комплексном пространстве 254
§ 84. Инвариантные подпространства 254
Примеры. Индуцированный оператор
§ 85. Собственные значения и собственные векторы 256
§ 86. Характеристический многочлен 257
Определение, основные свойства. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве. Способ нахождения собственных векторов
§ 87. Собственное подпространство 260
§ 88. Операторы простой структуры 261
Критерий простой структуры. Матричная формулировка операторных свойств. Жорданова клетка
§ 89. Треугольная форма матрицы линейного оператора 265
§ 90. Нильпотентный оператор 266
§ 91. Корневые подпространства 269
Корневые векторы. Корневые подпространства. Расщепление линейного оператора.
§ 92. Жорданова форма 273
Канонический базис корневого подпространства. Нумерация базиса. Матрица оператора $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе. Жорданов базис и жорданова нормальная форма матрицы оператора. Приведение матрицы к жордановой форме. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Некоторые приложения
§ 93. Вещественный аналог жордановой формы 280
Инвариантные подпространства минимальной размерности. Вещественный аналог жордановой формы

Глава XVI. **Линейные операторы в унитарных (евклидовых) пространствах** 284

§ 94. Сопряженный оператор 284

Определение и свойства. Матрицы операторов A и A^* в паре ортонормированных базисов. Ядра и образы операторов A и A^*

§ 95. Сопряжение оператора, действующего в одном пространстве. Биортогональные базисы 286

§ 96. Нормальный оператор 288

Определение и свойства. Нормальный оператор и его матрица в унитарном пространстве. Нормальный оператор и его матрица в евклидовом пространстве

§ 97. Унитарный (ортогональный) оператор 292

Критерии унитарности. Спектральная характеристика унитарного оператора. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора

§ 98. Самосопряженный оператор 297

§ 99. Знакоопределенные операторы 298

§ 100. Разложения линейного оператора 301

Эрмитово разложение. Сингулярная пара базисов и сингулярное разложение. Полярное разложение

Глава XVII. **Билинейные и квадратичные формы** 308

§ 101. Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве 308

Билинейные формы. Квадратичные формы. Канонический вид квадратичной формы

§ 102. Квадратичные формы в вещественном пространстве 315

Закон инерции. Знакоопределенные квадратичные формы. Общий вид скалярного произведения в вещественном пространстве

§ 103. Квадратичные формы в комплексном пространстве 318

Полуторалинейные формы. Эрмитовы формы

§ 104. Квадратичные формы в евклидовом (унитарном) пространстве 321

Глава XVIII. **Геометрия квадратичных форм и поверхности второго порядка** 325

§ 105. Гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве 325

Общее уравнение. Приведенные уравнения. Инварианты гиперповерхности. Классификация гиперповерхностей

§ 106. Алгебраические поверхности второго порядка 329

Общее уравнение. Приведенные уравнения. Канонические уравнения. Геометрические свойства

Глава XIX. **Линейные нормированные пространства** 342
§ 107. Норма вектора 342
Нормы в арифметическом пространстве. Еще о метрическом пространстве. Норма и метрика. Нормы в конечномерном пространстве
§ 108. Норма и скалярное произведение 348
§ 109. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве 350
Компактность единичной сферы. Эквивалентность норм
§ 110. Линейные операторы в нормированных пространствах 352
Непрерывность и ограниченность. Норма оператора. Подчиненная норма. Спектральная норма
§ 111. Матричные нормы оператора и нормы матрицы 355
§ 112. Экстремальные задачи для самосопряженного оператора .. 357
Вариационные свойства собственных значений. Вариационные свойства сингулярных чисел. Разделение собственных значений
§ 113. Задачи наилучшего приближения в нормированных пространствах 361
Наилучшее приближение. Аппроксимация оператора (матрицы). Расстояние до множества вырожденных матриц
§ 114. Линейные операторные уравнения 364
Нормальное решение. Псевдорешение. Метод наименьших квадратов. Нормальное псевдорешение
Приложение. Проблемы оснований геометрии и обоснования метода координат 370
§ 1. Аксиомы элементарной геометрии 370
§ 2. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Евклида 382
§ 3. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского 385
§ 4. Заключительные замечания о проблемах аксиоматики 387
Предметный указатель 388
Указатель обозначений 393

ПРЕДИСЛОВИЕ

Линейная алгебра является широко используемым аппаратом для всех разделов математики и ее приложений. Особенно возросла ее роль в связи с развитием вычислительной техники и математики. Не будет большим преувеличением утверждать, что любое математическое приложение в вычислительной практике на том или ином этапе сводится к решению алгебраической задачи.

Логическая структура линейной алгебры исключительно проста, она основана на небольшом числе удобных в обращении понятий и аксиом. Однако абстрактный характер алгебраических понятий затушевывает это ее свойство и затрудняет первоначальный опыт изучения линейной алгебры. Объединение линейной алгебры и аналитической геометрии в один курс позволяет подчеркнуть геометрическую природу линейной алгебры и сделать ее объекты более наглядными. По существу, линейная алгебра и аналитическая геометрия настолько связаны, что между ними трудно провести четкую грань, "во многих случаях они отличаются друг от друга лишь языком: каждую из этих дисциплин можно понимать как перевод другой" (Ж. Дьедонне).

При написании этой книги мы придерживались традиции объединения (переплетения) линейной алгебры и аналитической геометрии, установившейся в системе преподавания на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. При совместном изучении этих дисциплин геометрические представления своей наглядностью делают алгебраические понятия и факты более воспринимаемыми, помогают уяснить, а зачастую и предвидеть не всегда очевидные факты. В свою очередь алгебраический формализм позволяет проводить геометрические исследования более компактно.

Авторы использовали ряд методических приемов из учебников, написанных А.Г. Курошем [14], И.М. Гельфандом [6], Н.В. Ефимовым [7], Г.Е. Шиловым [17], В.В. Воеводиным [2], А.И. Кострикиным [12], В.А. Ильиным и Э.Г. Позняком [10].

Нам приятно подчеркнуть благотворное влияние на методические особенности предлагаемой книги идей первого лектора по данному курсу на факультете ВМиК МГУ В.В. Воеводина.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить ректора МГУ В.А. Садовничего и декана факультета ВМиК МГУ Д.П. Костомарова, оказавших существенную поддержку изданию этой книги, и научного редактора книги Л.В. Крицкова за ценные замечания, способствовавшие ее улучшению.

В.А. Ильин, Г.Д. Ким

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании нам удалось упростить некоторые доказательства. Ряд других доказательств мы излагаем более подробно, указывая возможные обобщения, содержащие существенную дополнительную информацию.

В текст книги внесены небольшие дополнения, касающиеся общей алгебры, теории точечных пространств, метрических и нормированных пространств, вычислительных основ линейной алгебры, а в конце книги помещено приложение, посвященное проблемам оснований геометрии и обоснования метода координат.

Наконец, нами исправлены имевшиеся в предыдущем издании опечатки и неточности.

Мы выражаем благодарность нашим коллегам по кафедре и факультету ВМиК МГУ – профессорам Е.Г. Дьяконову, Е.Е. Тыртышникову и доцентам Н.И. Ионкину, Л.В. Крицкову, В.С. Панфёрову, Р.В. Разумейко и А.И. Фалину – за полезные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения. С благодарностью мы отмечаем, что труд Л.В. Крицкова по прочтению рукописи вышел за рамки редактирования.

Мы очень благодарны рецензентам академикам РАН С.М. Никольскому и В.В. Воеводину, а также ректору МПГУ члену-корреспонденту РАН В.Л. Матросову и доценту МГУ А.И. Камзолову за поддержку этой книги.

Мы считаем также нашим приятным долгом выразить глубокую благодарность ректору МГУ академику В.А. Садовничему и декану факультета ВМиК МГУ академику Е.И. Моисееву, стараниями которых эта книга включена в серию "Классический университетский учебник".

Мы очень признательны сотрудникам издательства "Проспект" С.М. Грачеву, Л.В. Рожникову, В.А. Товстоногу, К.В. Хомерики, облегчившим нам подготовку рукописи к печати.

Москва, 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

2. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.

3. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1980.

4. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, 1988.

7. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1978.

8. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2004 (классический университетский учебник).

10. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2004 (классический университетский учебник).

11. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Часть I. М.: Проспект и изд-во Моск. ун-та, 2004 (классический университетский учебник).

12. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Физматлит, 2004 (классический университетский учебник).

13. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

14. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1988.

15. Тыртышников Е. Е. Краткий курс численного анализа. М.: ВИНИТИ, 1974.

16. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.

17. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969.

Глава I. Матрицы

§ 1. Понятие матрицы

Терминология и обозначения. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. *Матрицей размера* $m \times n$ называется совокупность mn чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. При этом сами числа называются *элементами* матрицы.

В первых главах мы будем рассматривать лишь вещественные матрицы, т.е. матрицы с вещественными элементами. В дальнейшем (§43) мы убедимся в том, что все изложенные свойства остаются справедливыми и в общем случае матриц над произвольным полем.

Матрицу обозначают прописными латинскими буквами, при этом саму таблицу заключают в скобки (либо круглые, либо квадратные, либо двойные вертикальные):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначают строчными латинскими буквами, снабженными двумя индексами: a_{ij} – элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце (в позиции (i, j)). В этих обозначениях матрица размера $m \times n$ в общем виде может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Приведем ряд других обозначений, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем:

$\mathbb{R}^{m\times n}$ – множество всех вещественных матриц размера $m \times n$;

$A = (a_{ij})$ – матрица A с элементами a_{ij} в позиции (i, j);

$\{A\}_{ij}$ – элемент матрицы A в позиции (i, j);

$A_{m\times n}$ – матрица A размера $m \times n$.

Элементы a_{ij}, где $i = j$, называются *диагональными*, а элементы a_{ij}, где $i \neq j$, – *внедиагональными*. Совокупность диагональных элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$, где $k = \min(m, n)$, называется *главной диагональю* матрицы, а совокупность элементов a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $\dots$ – ее *побочной диагональю*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается символом O. Отметим, что для каждого размера $m\times n$ существует своя нулевая матрица.

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей n-го порядка*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее

внедиагональные элементы равны нулю. Обозначение: $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны между собой, называется *скалярной*. Скалярная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется *единичной (тождественной)* и обозначается символами I или E. Отметим, что для каждого порядка n существует своя единичная матрица. Число $\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ называется *следом* матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Матрица размера $1 \times n$ называется *строчной матрицей*, или *матрицей-строкой*, или *вектор-строкой*. Матрица размера $m \times 1$ называется *столбцовой матрицей*, или *матрицей-столбцом*, или *вектор-столбцом*.

Компактная форма записи матрицы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим i-ю строку и i-й столбец матрицы A символами a_i' и a_i:

$$a_i' = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях матрица A может быть записана более компактно:

$$A = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} \qquad \text{или} \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Такой формой записи мы нередко будем пользоваться, причем не только лаконичности ради.

Матрицы специального вида. Квадратная матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *верхней (правой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, и *нижней (левой) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$. Общий вид треугольных матриц:

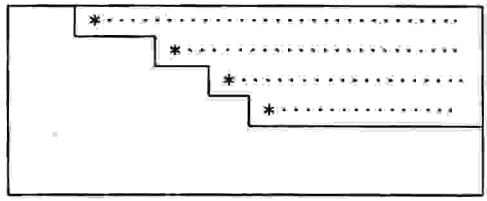
$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *верхней (правой) ступенчатой*, если она обладает следующими свойствами:

1) если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;

2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами k_i и k_{i+1}, то $k_i < k_{i+1}$.

Эти свойства означают, что все нулевые строки являются последними и что все элементы, расположенные слева и под первым ненулевым элементом каждой строки, равны нулю. Происхождение названия становится понятным из "рисунка" ступенчатой матрицы:



(здесь все неотмеченные элементы равны нулю, а заведомо ненулевые элементы помечены знаком $*$).

Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим определение *нижней (левой) ступенчатой* матрицы.

Ступенчатая матрица, у которой $k_i = i$, называется *трапециевидной*. Общий вид трапециевидных матриц:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$ при $i = \overline{1, r}$.

До сих пор мы рассматривали матрицы, элементами которых служат числа. Так в основном будет и в дальнейшем. Одно из немногих в этом отношении исключений составляют матрицы, элементами которых являются также матрицы. Остановимся на этом более подробно.

Разобьем матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ системой горизонтальных и вертикальных линий на клетки (блоки). *Клеточной (блочной) матрицей* называется матрица, элементами которой служат эти клетки. Общий вид клеточной матрицы:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sk} \end{array}\right],$$

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА МГУ 7
67.00.68 13

где A_{ij} – клетка, расположенная в i-й клеточной строке и в j-м клеточном столбце. Квадратная клеточная матрица $A = (A_{ij})$ с квадратными клетками на главной диагонали называется *квазидиагональной*, если $A_{ij} = O$ при $i \neq j$, и *квазитреугольной*, если $A_{ij} = O$ при $i > j$ (или $i < j$).

Как будет видно из дальнейшего, блочные матрицы по многим характеристикам близки к числовым матрицам (см., например, с. 17, свойство 1). Это продуктивно используется в вычислительной математике для обработки большого объема информации.

§ 2. Операции над матрицами

Равенство матриц. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Обозначение: $A = B$.

Линейные операции. *Суммой* матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначение: $C = A + B$.

Матрица $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* к матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Теорема 2.1. *Операция сложения матриц обладает следующими свойствами:* $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *и* $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1) $A + B = B + A$ *(сложение матриц коммутативно);*

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(сложение матриц ассоциативно);*

3) $A + O = O + A = A$;

4) $A + (-A) = -A + A = O$.

Доказательство. Эти свойства непосредственно вытекают из определения и доказываются по единой схеме. Докажем свойство 2. Матрицы $(A + B) + C$ и $A + (B + C)$ имеют одинаковый размер $m \times n$, при этом их элементы, расположенные в одинаковых позициях, равны, так как $\{(A+B)+C\}_{ij} = \{A+B\}_{ij} + \{C\}_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = \{A\}_{ij} + \{B + C\}_{ij} = \{A + (B + C)\}_{ij}$. ■

Разностью матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $A = B + X$.

Обозначение: $X = A - B$. Очевидно, что для любых матриц $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует единственная разность $A - B$, при этом

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначение: $C = \alpha A$.

Теорема 2.2. *Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:* $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $1 \cdot A = A$;

2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения матриц);*

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения чисел);*

5) $-A = (-1)A$. - зачем? см. стр. 65.

Все эти свойства непосредственно вытекают из определения и проверяются по той же схеме, что и свойство 2 из теоремы 2.1. ■

Итак, на множестве $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных матриц одинакового размера $m \times n$ любые две матрицы можно сложить и любую матрицу можно умножить на вещественное число. При этом результаты выполнения этих операций также будут матрицами из $\mathbb{R}^{m\times n}$. Обратим внимание на эту особенность множества $\mathbb{R}^{m\times n}$, так как в дальнейшем мы неоднократно будем сталкиваться с множествами, наделенными операциями сложения и умножения на число, которые обладают свойствами, сформулированными в теоремах 2.1 и 2.2.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число позволяют однозначно определить матрицу

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i,$$

называемую *линейной комбинацией матриц* $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Умножение матриц. *Произведением матриц* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}.$$

Обозначение: $C = AB$.

Уже из определения следует, что произведение матриц зависит от порядка сомножителей; произведение AB определено лишь в том случае, когда размеры матриц A и B согласованы специальным образом: *число столбцов левой матрицы должно совпадать с числом строк правой.* Это означает, что оба произведения AB и BA определены тогда и только тогда, когда A и B имеют размеры $m \times n$ и $n \times m$ соответственно. При этом размеры матриц AB и BA совпадают лишь при $m = n$. Следовательно, равенство $AB = BA$ возможно лишь для квадратных матриц одинакового порядка. Однако и в этом случае произведение матриц, вообще говоря, может зависеть от порядка сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными* или *коммутирующими*. Очевидно, что на множестве $\mathbb{R}^{n\times n}$

1) нулевая и единичная матрицы перестановочны с любой другой матрицей;

2) любые две диагональные матрицы перестановочны.

Теорема 2.3. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(AB)C = A(BC)$ *(свойство ассоциативности),*

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$,

3) $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$ *(свойство дистрибутивности),*

выполненными для любых матриц A, B, C, *для которых левые части равенств имеют смысл.*

Доказательство. Эти свойства проверяются непосредственно. Остановимся подробнее на свойстве 1. Так как произведение $(AB)C$ имеет смысл, то размеры матриц A, B и C согласованы соответствующим образом. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k\times p}$. Тогда и произведение $A(BC)$ имеет смысл, при этом размеры обеих матриц $(AB)C$ и $A(BC)$ совпадают. Проверим совпадение элементов этих матриц, расположенных в одинаковых позициях. Обозначим $AB = U = (u_{ij})$, $BC = V = (v_{ij})$, $(AB)C = S = (s_{ij})$, $A(BC) = T = (t_{ij})$. Тогда для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,p}$

$$s_{ij} = \sum_{q=1}^{k} u_{iq}c_{qj} = \sum_{q=1}^{k}\Big(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rq}\Big)c_{qj},$$

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}v_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\Big(\sum_{q=1}^{k} b_{rq}c_{qj}\Big).$$

Числа c_{qj} в первой двойной сумме (a_{ir} – во второй) не зависят от индекса суммирования r (соответственно q), т.е. являются общими множителями слагаемых внутренней суммы. Следовательно, c_{qj} (соответственно a_{ir}) можно внести под знак суммирования, так что

$$s_{ij} = \sum_{q=1}^{k}\Big(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rq}c_{qj}\Big) = \sum_{q=1}^{k}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rq}c_{qj},$$

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\Big(\sum_{q=1}^{k} a_{ir}b_{rq}c_{qj}\Big) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{q=1}^{k} a_{ir}b_{rq}c_{qj}.$$

Отсюда и из свойств двойной суммы следует, что $s_{ij} = t_{ij}$. ■

Транспонирование матрицы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $A^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ называется *транспонированной* к матрице A, если

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

Для обозначения транспонированной матрицы используются также символы A^t и A'.

Переход от матрицы A к A^T называется *транспонированием матрицы* A. Заметим, что при транспонировании матрицы A ее строки становятся столбцами A^T с теми же номерами, а столбцы – строками. Другими словами, транспонирование – это вращение матрицы в пространстве на 180° вокруг главной диагонали.

Теорема 2.4. *Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

3) $(AB)^T = B^T A^T$,

4) $(A^T)^T = A$,

выполненными для всех матриц A, B, *для которых имеют смысл левые части равенств.*

Доказательство. Проверим свойство 3, остальные непосредственно вытекают из определения. Положим $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, произведение AB при этом имеет смысл. Нетрудно проверить, что произведение $B^T A^T$ также имеет смысл, при этом размеры матриц $(AB)^T$ и $B^T A^T$ совпадают. Элементы этих матриц, расположенные в одинаковых позициях, равны, так как

$$\{(AB)^T\}_{ij} = \{AB\}_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si} = \sum_{s=1}^{n} b^t_{is} a^t_{sj} = \{B^T A^T\}_{ij}. \blacksquare$$

Некоторые свойства операций. Приведем несколько полезных фактов, касающихся операций над матрицами. Доказательство этих свойств предоставляется читателю.

1. Операции сложения, умножения на число и умножения блочных матриц совершаются по тем же правилам, по которым они совершаются с обычными числовыми матрицами:

а) если блочные матрицы $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ имеют одинаковый размер и одинаковым образом разбиты на клетки, то сумме матриц A и B при том же разбиении на клетки отвечает блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$;

б) произведению αA отвечает блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами $C_{ij} = \alpha A_{ij}$;

в) если $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ – блочные матрицы, у которых число столбцов блока A_{is} равно числу строк блока B_{sj} при любых i, s, j, то произведению AB соответствует блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами

$$C_{ij} = \sum_s A_{is} B_{sj}.$$

2. Вектор-столбец $e_i = (0 \ldots 0\, 1\, 0 \ldots 0)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ и вектор-строку $e'_i = (0 \ldots 0\, 1\, 0 \ldots 0) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ (у которых все компоненты равны 0, кроме i-й, равной 1) будем называть соответственно *i-м единичным столбцом* и *i-й единичной строкой*. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то в обозначениях (1.1)

$$Ae_i = a_i, \qquad e'_i A = a'_i. \tag{2.1}$$

3. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $b' = (\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$ и $b = (\alpha_1\, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)^T$ – вектор-строка и вектор-столбец соответственно, то

$$Ab = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \qquad b'A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a'_i. \tag{2.2}$$

4. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, то

$$AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_k \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} a_1'B \\ a_2'B \\ \vdots \\ a_m'B \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

т.е. *столбцы произведения AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, а строки произведения AB – линейными комбинациями строк матрицы B.*

§ 3. Элементарные преобразования матриц

Приведение матрицы к ступенчатой форме. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Теорема 3.1 (об основном процессе). *Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований только строк первого и третьего типов может быть приведена к верхней ступенчатой форме.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \neq O$. Процесс приведения этой матрицы к верхней ступенчатой форме состоит в общем случае из $k = \min(m, n)$ шагов. Иногда, как это будет видно ниже, он обрывается раньше, давая нужный результат.

Первый шаг. а) Так как $A \neq O$, то в ней должен быть хотя бы один ненулевой столбец. Пусть k_1 – номер *первого* из них. В k_1-м столбце существует хотя бы один ненулевой элемент a_{ik_1}. Если $a_{1k_1} \neq 0$, то переходим к п. "б". Если же $a_{1k_1} = 0$, то, поменяв местами 1-ю и i-ю строки (т.е. выполнив элементарное преобразование *строк* первого типа), получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k_1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mk_1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

в которой $a_{1k_1} \neq 0$. Хотя при таком переходе элементы матрицы A могли измениться, мы оставили прежние обозначения с тем, чтобы акцентировать внимание лишь на тактической стороне процесса.

б) Элемент a_{1k_1} назовем *ведущим (главным)* элементом первого шага. С его помощью аннулируем все расположенные под ним элементы k_1-го столбца. Для этого из всех строк, начиная со второй,

вычтем первую строку, умноженную на a_{2k_1}/a_{1k_1}, a_{3k_1}/a_{1k_1}, ..., a_{mk_1}/a_{1k_1} соответственно (т.е. выполним элементарные преобразования *строк* третьего типа).

После выполнения первого шага матрица A перейдет в матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & a_{1,k_1+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,k_1+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m,k_1+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

в которой *первая* строка является *первой* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы. Если при этом все строки, начиная со второй, стали нулевыми, то весь процесс заканчивается, так как матрица уже приведена к верхней ступенчатой форме. Если же в этих строках есть хотя бы один ненулевой элемент, т.е. если матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{2,k_1+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,k_1+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \neq O,$$

то переходим ко второму шагу.

Второй шаг. Второй шаг аналогичен первому. Он состоит в применении к матрице A_1 процедуры описанного выше первого шага. При этом можно считать, что выполняются элементарные преобразования строк всей матрицы A, так как нулевые элементы этих строк, расположенные в первых k_1 столбцах, при элементарных преобразованиях строк не изменяются. В результате *второго* шага уже и *вторая* строка матрицы A станет *второй* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы.

Переход к следующему шагу аналогичен уже известному переходу от первого шага ко второму. Повторяя описанные преобразования на следующих шагах, самое большее через $k = \min(m, n)$ шагов мы получим требуемый результат. Отметим, что ведущим элементом i-го шага является первый ненулевой элемент i-й строки, т.е. a_{ik_i}.

Описанный здесь процесс будем называть *основным процессом* приведения матрицы к ступенчатой форме. ■

Приведение к трапециевидной форме. Основной процесс с незначительной модификацией может быть использован и для приведения матрицы к верхней трапециевидной форме. Для этого нужно привлечь и элементарные преобразования столбцов: переставить в ступенчатой матрице столбцы так, чтобы k_i-й столбец оказался на i-м месте. Итак, произвольная ненулевая матрица элементарными преобразованиями строк и перестановками столбцов может быть приведена к верхней трапециевидной форме.

Если в основном процессе поменять ролями строки и столбцы, то матрица A приведется к нижней ступенчатой (трапециевидной) форме.

Приведение к треугольной форме. Квадратная матрица с помощью основного процесса приводится к треугольной форме.

Замечание. Идеи основного процесса используются во многих компьютерных алгоритмах вычислительной алгебры. Выбор ведущего элемента здесь представляет собой особую проблему, так как от этого зависит точность вычислений. Исследование этой проблемы выходит за рамки данной книги; отметим лишь, что ведущий элемент не должен быть "маленьким". Именно этим определяется многообразие алгоритмов, реализующих основной процесс, с различными стратегиями выбора ведущего элемента.

Матрицы элементарных преобразований. Элементарные преобразования матрицы просты и удобны в матричных исследованиях. Однако словесное описание выполняемых преобразований весьма утомительно как само по себе, так и для его восприятия. Этого можно избежать, если ввести некоторые матрицы специального вида.

Матрицами элементарных преобразований называются квадратные матрицы D_i, P_{ij}, L_{ij} вида

$$D_i = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \alpha & & & & & i \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & i & & & & & \end{Vmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

$$P_{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & & & i \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & 0 & & & & j \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & i & & j & & & & \end{Vmatrix},$$

$$L_{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & 0 & & & & i \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & \beta & & 1 & & & & j \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & i & & j & & & & \end{Vmatrix}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \qquad (3.1)$$

в которых все диагональные элементы, кроме указанных, равны 1, а все внедиагональные элементы, кроме указанных, равны 0.

Теорема 3.2. *Умножение матрицы A на матрицы элементарных преобразований P_{ij}, D_i, L_{ij} справа равносильно элементарным преобразованиям столбцов матрицы A первого, второго и третьего типов соответственно, а умножение слева на матрицы P_{ij}, D_i, L_{ij}^T – аналогичным элементарным преобразованиям строк.*

Доказательство. Докажем одно из сформулированных утверждений: умножение матрицы A на L_{ij} справа равносильно прибавлению к i-му столбцу матрицы A ее j-го столбца, умноженного на β. Действительно, пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – столбцы матрицы L_{ij}. Тогда, как следует из (2.3), (2.2) и (2.1),

$$AL_{ij} = \begin{bmatrix} Al_1 & \ldots & Al_n \end{bmatrix} = \{l_k = e_k \text{ при } k \neq i\} =$$
$$= [a_1 \ldots a_{i-1}\ Al_i\ a_{i+1} \ldots a_n] = \{Al_i = a_i + \beta a_j\} =$$
$$= [a_1 \ldots a_{i-1}\ (a_i + \beta a_j)\ a_{i+1} \ldots a_n]. \blacksquare$$

Итак, с помощью матриц элементарных преобразований все элементарные преобразования матрицы могут быть записаны весьма лаконично: $P_{ij}A$, D_iA, L_{ij}^TA, AP_{ij}, AD_i, AL_{ij}.

В свете доказанной теоремы можно по-иному сформулировать теорему 3.1: *для любой ненулевой матрицы A существуют матрицы элементарных преобразований $L_1, \ldots, L_k$ такие, что произведение $L_k \ldots L_1\, A$ имеет верхнюю ступенчатую форму.*

§ 4. Определители

Перестановки. Упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, в которой

1) $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad i = \overline{1, n}$;

2) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$,

называется *перестановкой* из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Перестановка $1, 2, \ldots, n$ называется *натуральной*.

Замечание. Аналогично рассматриваются перестановки из n произвольных символов: достаточно перенумеровать эти символы и иметь дело с их номерами $1, 2, \ldots, n$[1].

Преобразование перестановки, при котором два ее числа α_i и α_j с номерами $i \neq j$ меняются местами, называется *транспозицией*.

Говорят, что два числа α_i и α_j в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют *инверсию (беспорядок)*, если большее из них предшествует меньшему, т.е. если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$, и *порядок* – в противном случае, т.е. если $\alpha_i < \alpha_j$ при $i < j$. Перестановка называется *четной*, если общее число инверсий в ней четно, и *нечетной* – в противном случае. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначается символами $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $\sigma(\alpha)$.

Теорема 4.1. *Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n!$.*

[1] В § 8 будет дано общее определение перестановки n-го порядка.

Доказательство. Переберем все перестановки из n чисел. В качестве α_1 можно взять любое из этих чисел. Это дает n возможностей. В каждой из них α_1 уже выбрано и в качестве α_2 можно выбрать любое из $n-1$ оставшихся чисел. Это означает, что число различных способов выбрать α_1 и α_2 равно $n(n-1)$. Продолжая эти рассуждения, получим, что число различных способов выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равно $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$. ■

Теорема 4.2. *Каждая транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. 1. Пусть в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ меняются местами два соседних числа α_i и α_{i+1}, т.е.

$$\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \quad \longmapsto \quad \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots$$

(здесь многоточия заменяют числа, которые не затрагивались при транспозиции). Очевидно, что в обеих перестановках числа, оставшиеся на местах, составляют одни и те же инверсии друг с другом и с числами α_i, α_{i+1}. Если числа α_i и α_{i+1} раньше составляли инверсию, то в новой перестановке она пропадает; если же они не составляли инверсию, то теперь появится одна новая инверсия. Таким образом, общее число инверсий в новой перестановке отличается от старой на единицу, т.е. четность при такой транспозиции меняется.

2. Пусть теперь между переставляемыми числами α_i и α_j расположено k чисел, т.е.

$$\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_j \ldots \quad \longmapsto \quad \ldots, \alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_i \ldots$$

Новую перестановку можно получить из старой, последовательно меняя местами соседние числа: α_i поменять местами $(k+1)$ раз с соседними числами $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_j$, а затем α_j поменять местами k раз с числами $\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+1}$. При этом четность перестановки изменится $2k+1$ раз. Следовательно, и при такой транспозиции четность перестановки меняется. ■

Теорема 4.3. *Все $n!$ перестановок из n чисел могут быть упорядочены так, чтобы каждая последующая отличалась от предыдущей на одну транспозицию, причем начинать это упорядочение можно с любой перестановки.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n=2$ утверждение теоремы легко проверить: $(1,2), (2,1)$ и $(2,1), (1,2)$.

Пусть утверждение теоремы верно для $n-1$ чисел. Докажем его для n чисел. Пусть первая перестановка имеет вид $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

а) Сначала упорядочим все перестановки, начинающиеся с α_1. Таких перестановок $(n-1)!$, и по индуктивному предположению они могут быть упорядочены нужным образом, начиная с перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, так как это сводится к упорядочению перестановок из $n-1$ чисел, начиная с $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

б) Далее в последней перестановке из этого списка выполним одну транспозицию, поменяв местами числа α_1 и α_2. И снова упорядочим все перестановки, начинающиеся с α_2, и т.д. ■

Следствие 1. *При $n \geq 2$ число четных перестановок равно числу нечетных.* Действительно, после упорядочения в списке всех перестановок четные и нечетные перестановки будут чередоваться, а так как $n!$ четно при $n \geq 2$, то количества четных и нечетных перестановок совпадают и равны $n!/2$.

Следствие 2. *От каждой перестановки из n чисел можно перейти к любой другой перестановке из этих же чисел с помощью конечного числа транспозиций.*

Теорема 4.4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – перестановка из первых n натуральных чисел с числом инверсий s, то после преобразования ее в натуральную перестановку индексные номера $1, 2, \ldots, n$ образуют новую перестановку с тем же числом инверсий s.*

Доказательство. Рассмотрим в перестановке

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n \qquad (4.1)$$

любые ее два числа α_i и α_j.

Числа α_i и α_j образуют либо инверсию ($\alpha_i > \alpha_j, i < j$), либо порядок ($\alpha_i < \alpha_j, i < j$). После преобразования перестановки (4.1) в натуральную числа α_i и α_j будут располагаться следующим образом:

$1, 2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, n$ в случае инверсии,
$1, 2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, n$ в случае порядка,

причем в обоих случаях $i < j$. Это означает, что числа α_i и α_j в перестановке (4.1) и их индексы i и j в перестановке индексных номеров одновременно образуют либо инверсию, либо порядок. Следовательно, обе эти перестановки имеют одинаковое число инверсий s. ■

Построение определителя n-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица n-го порядка. Рассмотрим произведение элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}. \qquad (4.2)$$

Заметим, что в этом произведении сомножители упорядочены в порядке возрастания номеров строк, при этом номера столбцов α_1, α_2, ..., α_n образуют перестановку из чисел $1, 2, \ldots, n$, так как $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Произведений вида (4.2) в матрице A столько, сколько существует перестановок $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из n чисел, т.е. $n!$.

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ *n-го порядка* называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$.

Для обозначения определителя приняты символы $|A|$, $\det A$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{4.3}$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из чисел $1, 2, \dots, n$.

Каждое произведение в сумме (4.3) называется *членом определителя*, а число $(-1)^{\sigma(\alpha)}$ – его *знаком*.

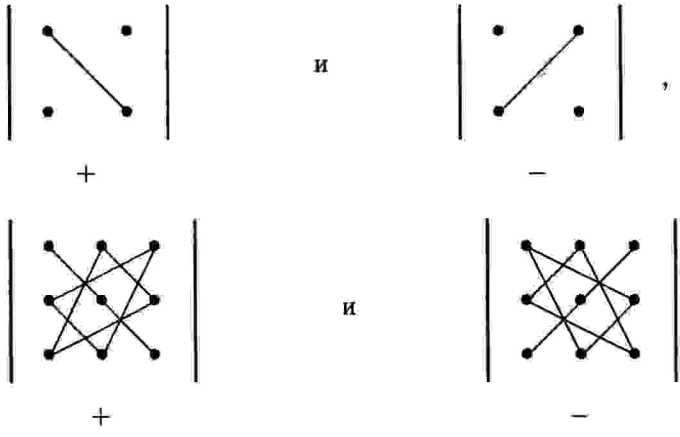
Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя n-го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.

Определение (4.3) для $n = 2$ и $n = 3$ приобретает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{4.4}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Для запоминания соотношений (4.4) и (4.5) существуют удобные мнемонические правила, дающие схему вычисления положительных и отрицательных членов определителей второго и третьего порядков:



соответственно. В этих схемах элементы, входящие в одно произведение, соединены отрезками.

Простейшие свойства определителя.

1°. *Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.*

Действительно, если $A = (a_{ij})$ – треугольная (верхняя или нижняя, (1.2)) матрица n-го порядка, то все члены определителя этой матрицы, кроме $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, заведомо равны нулю. Поэтому

$$|A| = (-1)^{\sigma(1,2,\dots,n)}\, a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \blacksquare$$

2°. *Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании:* $|A| = |A^T|$.

Доказательство. Определитель матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ состоит из членов вида (4.2). Все множители из произведения (4.2) и в матрице A^T находятся в разных строках и разных столбцах. Следовательно, $|A|$ и $|A^T|$ состоят из одних и тех же членов.

Сравним их знаки. Знак произведения (4.2) как члена $|A|$ определяется четностью перестановки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Определим его знак как члена $|A^T|$. Имеем $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n} = a^t_{\alpha_1 1}a^t_{\alpha_2 2}\dots a^t_{\alpha_n n}$. Упорядочим во втором произведении сомножители в порядке возрастания номеров строк, т.е. так, чтобы номера строк образовали натуральную перестановку: $a^t_{\alpha_1 1}a^t_{\alpha_2 2}\dots a^t_{\alpha_n n} = a^t_{1\beta_1}a^t_{2\beta_2}\dots a^t_{n\beta_n}$. Знак произведения (4.2) как члена $|A^T|$ определяется четностью перестановки $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Но эта перестановка совпадает с перестановкой индексных номеров в перестановке α после преобразования ее в натуральную. Согласно теореме 4.4, $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$. Таким образом, $|A|$ и $|A^T|$ являются суммами одинаковых слагаемых, т.е. совпадают. $\blacksquare$

Следствие 3. В определении (4.3) *определителя можно поменять ролями строки и столбцы:*

$$|A| = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\dots a_{\alpha_n n},$$

так как эта сумма равна $|A^T|$.

Из доказанного свойства вытекает и более общий вывод: строки и столбцы матрицы равноправны с точки зрения свойств определителя. Это означает, что свойства определителя, касающиеся строк матрицы, справедливы и для ее столбцов. Этим обстоятельством мы будем пользоваться в дальнейшем, ограничиваясь в доказательствах теорем только строчным или только столбцовым вариантом.

3°. *Если одна из строк (столбцов) матрицы целиком состоит из нулей, то ее определитель равен нулю.*

Утверждение вытекает непосредственно из определения (4.3) определителя, если учесть, что в каждый член определителя входит множителем элемент из нулевой строки. $\blacksquare$

4°. *При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.*

Утверждение также вытекает из определения определителя, если учесть, что в каждое слагаемое суммы (4.3) это число входит множителем ровно один раз и его можно вынести за знак суммы. $\blacksquare$

Заметим, что свойство 4 означает, что общий множитель элементов строки (столбца) матрицы можно выносить за знак определителя.

5°. *Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ik} = b_k + c_k, \quad k = \overline{1,n},$$

то определитель матрицы можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ b'+c' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ b' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ c' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix},$$

где $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $c' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Утверждение вытекает из определения (4.3), если учесть, что

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} = \\ = a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots b_{\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots c_{\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n}. \quad \blacksquare$$

Аналогичное свойство справедливо для столбцов.

Замечание 1. Свойства 4 и 5 часто объединяют, называя их *свойством линейности определителя* относительно строк и столбцов.

6°. *При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.*

Доказательство. Пусть в матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ переставляются i-й и j-й столбцы и B – результат этой перестановки:

$$A = [a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n], \quad B = [a_1 \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_n].$$

Очевидно, что определители матриц A и B состоят из одних и тех же членов. Сравним их знаки. Члену $a_{\alpha_1 1} \ldots a_{\alpha_i i} \ldots a_{\alpha_j j} \ldots a_{\alpha_n n}$ в $|A|$ соответствует перестановка $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n$, а в $|B|$ – перестановка $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$. Эти перестановки отличаются друг от друга одной транспозицией, т.е. имеют разную четность. Отсюда следует, что все члены определителя $|A|$ входят в определитель $|B|$ с противоположными знаками. Это означает, что $|A| = -|B|$. $\blacksquare$

Замечание 2. Отметим, что свойство 6 относится к случаю, когда переставляются строки (столбцы) с разными номерами.

7°. *Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки (столбца), равен нулю.*

Утверждение вытекает из свойства 6: достаточно в матрице поменять местами одинаковые строки, тогда $|A| = -|A| = 0$. $\blacksquare$

8°. *Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то определитель матрицы равен нулю.*

Утверждение вытекает из свойства линейности определителя и свойства 7. $\blacksquare$

9°. *Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то ее определитель не изменится.*

Утверждение вытекает из свойств 5 и 8. $\blacksquare$

Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le \min(m, n)$. Вы-

берем в матрице A произвольные k строк и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно. Элементы матрицы A, находящиеся на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором* k-го порядка матрицы A, расположенным в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Для обозначения миноров приняты символы $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $M\binom{i_1 i_2 \ldots i_k}{j_1 j_2 \ldots j_k}$, M_k, M. Итак,

$$M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица n-го порядка и $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ – ее минор, причем $k < n$. Если в матрице A вычеркнуть строки и столбцы, в которых расположен заданный минор, то оставшиеся элементы матрицы A образуют квадратную матрицу $(n-k)$-го порядка. Определитель этой матрицы называется *дополнительным минором к минору* $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Дополнительный минор обозначается символами $\overline{M}_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\overline{M}$, M^σ. Очевидно, что исходный минор является дополнительным к своему дополнительному минору. Дополнительный минор к минору $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$, взятый со знаком $(-1)^{\sum_{p=1}^{k}(i_p + j_p)}$, называется *алгебраическим дополнением* к минору $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ и обозначается символом $A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Итак,

$$A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} = (-1)^{i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k} \overline{M}_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Теорема 4.5 (теорема Лапласа). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$. Пусть в матрице A выбраны произвольные k строк (или столбцов). Тогда определитель матрицы A равен сумме всевозможных произведений миноров k-го порядка, расположенных в выбранных строках (соответственно столбцах), на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Пусть выбраны строки с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Следует доказать, что

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k)} M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}, \tag{4.6}$$

где суммирование ведется по всевозможным значениям $j_1, j_2, \ldots, j_k$ $(1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n)$.

Для доказательства рассмотрим подробнее правую часть требуемого равенства (4.6). Минор $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$, как определитель k-го порядка, представляет собой сумму произведений k элементов матрицы A. Точно так же и алгебраическое дополнение $A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ является суммой произведений $n-k$ элементов матрицы A. Значит, произведение

$M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, а следовательно, и вся правая часть (4.6) представляет собой сумму произведений n элементов матрицы A. Обозначим эту сумму через S и покажем, что она совпадает с $\det A$ как с суммой (4.3) членов определителя с соответствующими знаками.

1. Сначала покажем, что произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ представляет собой некоторую сумму членов $\det A$, причем с теми же знаками, с какими они входят в $\det A$.

$A =$

$M^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k}$	
	$A^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k}$

Рис. 1

а) В простейшем случае, когда минор $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ находится в левом верхнем углу матрицы A (рис. 1), дополнительный минор будет занимать правый нижний угол, при этом он будет совпадать с алгебраическим дополнением, так как $(-1)^{(1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)} = 1$.

Возьмем произвольный член минора $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$: $(-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{k\alpha_k}$ и произвольный член дополнительного к нему минора:

$$(-1)^{\sigma(\beta)} a_{k+1,\beta_{k+1}} a_{k+2,\beta_{k+2}} \ldots a_{n\beta_n}.$$

Тогда произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ есть сумма произведений вида

$$(-1)^{\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k} a_{k+1,\beta_{k+1}} \ldots a_{n\beta_n}.$$

В этом произведении все сомножители находятся в разных строках и разных столбцах матрицы A, следовательно, оно будет членом $\det A$. Знак этого члена равен $(-1)^{\sigma(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta'_{k+1},\ldots,\beta'_n)}$, где $\beta'_j = \beta_j + k$. Но $\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta'_{k+1}, \ldots, \beta'_n) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta')$, так как никакое α_i ни с каким β'_j не образует инверсий: все $\alpha_i \leq k$, а все $\beta'_j > k$. При этом $\sigma(\beta') = \sigma(\beta)$, так как все инверсии и порядки в обеих перестановках сохраняются. Таким образом, произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ представляет собой некоторую сумму членов $\det A$, причем с теми же знаками, с какими они входят в $\det A$.

б) Общий случай минора $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ сводится к рассмотренному следующим образом. Будем переставлять i_1-ю строку матрицы A последовательно со всеми предыдущими до тех пор, пока она не займет место первой строки. Затем точно так же будем переставлять i_2-ю, $\ldots$, i_k-ю строки до тех пор, пока они не займут места второй, $\ldots$, k-й строк соответственно. Аналогично переставим j_1-й, j_2-й, $\ldots$, j_k-й столбцы до тех пор, пока они не займут места первого, второго, $\ldots$, k-го столбцов. При этом всего будет выполнено

$$\begin{aligned}(i_1 - 1) + \ldots + (i_k - k) + (j_1 - 1) + \ldots + (j_k - k) = \\ = (i_1 + \ldots + i_k) + (j_1 + \ldots + j_k) - 2(1 + \ldots + k)\end{aligned} \tag{4.7}$$

перестановок строк и столбцов матрицы A. В результате этих перестановок матрица A преобразуется в матрицу B, в которой рассматриваемый минор $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ матрицы A займет левый верхний угол. Так как при указанных преобразованиях взаимное расположение строк и столбцов дополнительного минора не изменилось, то дополнительный минор к минору $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ в матрице A останется дополнительным к нему и в матрице B. Из п. "а" следует, что произведение $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} \overline{M}_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ является суммой членов $\det B$ с теми же знаками, с какими они входят в $\det B$. Но, согласно свойству 6 определителя и равенству (4.7), $\det A = (-1)^{(i_1+\dots+i_k)+(j_1+\dots+j_k)} \det B$. Следовательно, слагаемые произведения $(-1)^{(i_1+\dots+i_k)+(j_1+\dots+j_k)} M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} \overline{M}_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ входят в $\det A$ со своими знаками.

2. Из доказанного в п. 1 следует, что вся сумма S представляет собой некоторую сумму членов $\det A$ со своими знаками.

3. Покажем теперь, что в сумму S входят все члены $\det A$. Пусть

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \tag{4.8}$$

– произвольный член $\det A$. В этом произведении соберем отдельно сомножители, расположенные в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$:

$$a_{i_1\alpha_{i_1}} a_{i_2\alpha_{i_2}} \dots a_{i_k\alpha_{i_k}}. \tag{4.9}$$

Они расположены в различных столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$. Эти номера однозначно определяются заданием члена (4.8). Обозначим через M минор k-го порядка матрицы A, расположенный в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$. Тогда произведение (4.9) будет членом этого минора, а произведение остальных сомножителей (4.8), не вошедших в (4.9), – членом дополнительного минора $\overline{M}$ к минору M. Итак, любой член определителя матрицы A может быть получен умножением определенного этим членом минора M на дополнительный к нему минор $\overline{M}$. Из доказанного в п. 1 следует, что при умножении минора M на его алгебраическое дополнение получится член (4.8) с его знаком.

4. Осталось доказать, что каждый член $\det A$ входит в сумму S ровно один раз и что других слагаемых в этой сумме нет. Для этого достаточно показать, что количество слагаемых в сумме S равно $n!$. Действительно, минор $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ состоит из $k!$ слагаемых, алгебраическое дополнение к нему – из $(n-k)!$ слагаемых. Значит, произведение $M_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} A_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ состоит из $k!(n-k)!$ членов определителя матрицы A. Таких произведений в сумме S столько, сколько существует миноров k-го порядка в строках $i_1, i_2, \dots, i_k$, т.е. столько, сколько существует способов выбрать k столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$ из n столбцов матрицы A. Итак, имеется C_n^k таких произведений, а количество слагаемых в сумме S равно $C_n^k k!(n-k)! = n!$. ■

Разложение определителя по строке (столбцу). Если в теореме Лапласа выбрать $k = 1$ и строку (столбец) с номером i, то минорами первого порядка, расположенными в i-й строке (столбце), будут сами элементы a_{ij} (a_{ji}). Обозначив через A_{ij} алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}, получим из теоремы Лапласа, что

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (\text{или} \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}). \tag{4.10}$$

почему не A_j^i пишется? вер $A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$?

Представление определителя в виде (4.10) называется *разложением определителя по i-й строке* (соответственно *по i-му столбцу*). Итак, *определитель матрицы равен сумме всех произведений элементов произвольной ее строки (столбца) на свои алгебраические дополнения.*

Определитель квазитреугольной матрицы.

Теорема 4.6. *Определитель квазитреугольной матрицы равен произведению определителей диагональных клеток.*

Доказательство. Пусть A – верхняя квазитреугольная матрица m-го порядка (рис. 2). Применим теорему Лапласа к группе из k столбцов матрицы A, образующих ее первый клеточный столбец.

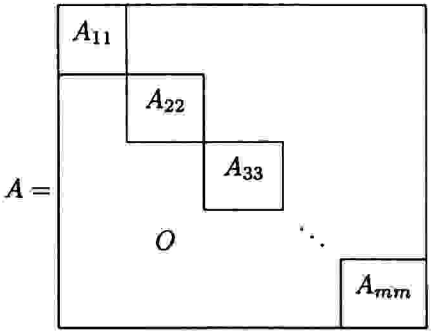


Рис. 2

В этих столбцах все миноры k-го порядка, кроме $|A_{11}|$, заведомо равны нулю, а алгебраическое дополнение к минору $|A_{11}|$ совпадает с дополнительным минором. Согласно теореме Лапласа отсюда следует, что $|A| = |A_{11}| \cdot |\tilde{A}|$, где $\tilde{A}$ – также квазитреугольная матрица, но уже $(m-1)$-го порядка, начинающаяся с клетки A_{22}.

Поступая точно так же еще $(m-1)$ раз, получим, что

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}| \cdot \ldots \cdot |A_{mm}|. \tag{4.11}$$

Аналогично получается равенство (4.11) и для нижней квазитреугольной матрицы. ■

Теорема 4.7. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – квадратные матрицы n-го порядка. Рассмотрим матрицу C вида

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & O & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & & & & \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

С одной стороны, C – квазитреугольная матрица, поэтому согласно (4.11)

$$|C| = |A| \cdot |B|. \tag{4.12}$$

С другой стороны, не меняя определителя матрицы C, преобразуем ее так, чтобы клетка A стала нулевой. Сначала аннулируем первую строку матрицы A, для чего прибавим к первой строке матрицы C ее $(n+1)$-ю, $(n+2)$-ю, ..., $2n$-ю строки, умноженные на $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ соответственно. В результате этих преобразований $\det C$ остается без изменения, первые n элементов первой строки матрицы C станут нулевыми, а вторые n элементов заполнятся элементами первой строки матрицы AB. Теперь в новой матрице выполним аналогичные преобразования второй строки: ко второй строке матрицы C прибавим ее $(n+1)$-ю, $(n+2)$-ю, ..., $2n$-ю строки, умноженные на $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$ соответственно. После этих преобразований определитель матрицы C не изменится, первые n элементов второй строки матрицы C станут нулевыми, а вторые n элементов заполнятся элементами второй строки матрицы AB. Выполнив аналогичные преобразования с третьей, ..., n-й строкой матрицы C, получим матрицу

$$C_1 = \left[\begin{array}{c|c} O & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right],$$

определитель которой равен определителю матрицы C. Переставив в матрице C_1 первый и $(n+1)$-й столбцы, второй и $(n+2)$-й столбцы, ..., n-й и $2n$-й столбцы, получим квазитреугольную матрицу

$$C_2 = \left[\begin{array}{c|c} AB & O \\ \hline B & -I \end{array}\right],$$

определитель которой отличается от определителя матрицы C_1 множителем $(-1)^n$. Таким образом, $|C| = |C_1| = (-1)^n |C_2| = |AB|$. Отсюда и из равенства (4.12) получаем, что

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \quad \blacksquare \tag{4.13}$$

Вычисление определителя. Многие задачи линейной алгебры связаны с проблемой вычисления определителя.

Было бы весьма затруднительным вычислять определитель исходя из его определения, т.е. вычисляя непосредственно все $n!$ членов и определяя их знаки. Для этого нужно выполнить $n!n$ операций умножения (без учета менее трудоемкой операции сложения чисел). Так, для $n = 100$ число умножений превосходит 10^{153} – с этим не в состоянии справиться даже самые мощные современные компьютеры.

Теорема Лапласа позволяет упростить проблему вычисления определителя, сводя ее к вычислению определителей более низких порядков. Однако, как видно из (4.11), (4.12), этот подход существенно эффективен лишь для матриц с большим числом нулевых элементов, сгруппированных специальным образом.

Среди различных методов вычисления определителя особое место в приложениях занимает *метод Гаусса*.

Метод Гаусса применяется для решения широкого класса матричных задач. Идея этого метода проста и естественна. Она состоит в том, что:

- выделяется тип матрицы, для которой задача решается достаточно просто;
- выделяется тип преобразований, которые либо не изменяют решений задачи, либо изменяют их контролируемым образом;
- произвольная матрица выделенными преобразованиями приводится к выделенному типу, тем самым задача общего вида сводится к более простой.

В применении к задаче вычисления определителя эта схема выглядит следующим образом:

– определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов (свойство 1);

– элементарные преобразования матрицы либо не изменяют определителя (свойство 9), либо изменяют (свойства 4 и 6), но так, что эти изменения можно легко восстановить;

– произвольная квадратная матрица элементарными преобразованиями приводится к треугольной форме (теорема 3.1).

Метод Гаусса вычисления определителя состоит в приведении матрицы элементарными преобразованиями к треугольному виду, вычислении определителя получившейся треугольной матрицы и восстановлении исходного определителя, если использовались элементарные преобразования типов 1 и 2 (§3).

Замечание 3. В методе Гаусса вычисления определителя можно использовать элементарные преобразования как строк, так и столбцов.

Замечание 4. Для вычисления определителя n-го порядка методом Гаусса требуется выполнить $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ операций умножения двух чисел. Теперь для $n = 100$ определитель может быть вычислен быстрее чем за одну секунду на компьютере с быстродействием 10^6 арифметических операций в секунду.

§ 5. Обратная матрица

Условие обратимости. Матрица A^{-1} называется *обратной к матрице* A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Матрица A, для которой существует обратная матрица, называется *обратимой*.

Из определения следует, что обратимой может быть лишь квадратная матрица, так как равенство $AA^{-1} = A^{-1}A$ возможно лишь для квадратных матриц A и A^{-1} одинакового порядка. Но не каждая квадратная матрица обратима. Так, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ при умножении справа на любую матрицу дает матрицу с нулевой первой строкой, т.е. ни для какой матрицы B произведение AB не может совпадать с единичной матрицей I. Выясним, какие свойства матрицы обеспечивают ее обратимость.

Квадратная матрица A называется *вырожденной (особенной)*, если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной)*, если $|A| \neq 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A, называется *присоединенной (взаимной)* к матрице A.

Теорема 5.1 (о фальшивом разложении определителя). *Сумма произведений элементов одной строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения к элементам другой ее строки (соответственно столбца) равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Покажем, что для любых ее двух строк i, j, где $i \neq j$,

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js} = 0. \tag{5.2}$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу B, которая отличается от A только j-й строкой: на месте j-й строки в B находится i-я строка матрицы A.

С одной стороны, $\det B = 0$ (§4, свойство 7). С другой стороны, $\det B = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js}$, так как в разложении $\det B$ по j-й строке алгебраические дополнения к элементам j-й строки матрицы B получаются вычеркиванием j-й строки и поэтому совпадают с алгебраическими дополнениями A_{js} к элементам j-й строки матрицы A. Отсюда следует (5.2). Аналогично доказывается столбцовый вариант теоремы. ■

Доказанную теорему иногда называют теоремой о "чужих" алгебраических дополнениях. Напомним, что в этой терминологии умножение на "свои" алгебраические дополнения дает разложение (4.10) определителя по строке (столбцу соответственно).

Теорема 5.2 (критерий обратимости). *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.*

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A обратима. Тогда существует обратная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = I$. Взяв определители от обеих частей этого равенства, согласно (4.13) получим, что $|A|\cdot|A^{-1}| = |I|$, т.е. $|A|\cdot|A^{-1}| = 1$. Следовательно, $|A| \neq 0$.

Достаточность. Пусть $|A| \neq 0$. Покажем, что матрица $\frac{1}{|A|}\widehat{A}$ является обратной к матрице A. В самом деле, из разложения определителя по строке (столбцу) и теоремы 5.1 имеем, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A|I$. Следовательно, $A\frac{1}{|A|}\widehat{A} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}A = I$, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}. \quad \blacksquare \tag{5.3}$$

Теорема 5.3 (о единственности обратной матрицы). *Если A – квадратная матрица и $AB = I$ (или $BA = I$), то $B = A^{-1}$.*

Доказательство. Из равенства $AB = I$ следует, что B – квадратная матрица и, согласно (4.13), A не вырождена. Следовательно, матрица A обратима и для нее существует обратная матрица A^{-1}. Тогда $A^{-1} = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$. Таким образом, $B = A^{-1}$. Аналогично рассматривается случай, когда $BA = I$. ■

Доказанная теорема устанавливает свойство единственности обратной матрицы, и, более того, из нее следует, что для квадратной матрицы A одного из равенств $AA^{-1} = I$ или $A^{-1}A = I$ достаточно, чтобы матрица A^{-1} была обратной к матрице A.

Некоторые свойства обратной матрицы.

1. $I^{-1} = I$, так как $I \cdot I = I$.
2. $|A^{-1}| = 1/|A|$, так как $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, так как $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, так как $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, так как $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$.

Вычисление обратной матрицы.

Соотношение (5.3) дает явный вид обратной матрицы. Оно полезно в теоретических исследованиях и совершенно неэффективно для практического вычисления (разве что для матриц второго порядка) вследствие большого объема требуемых вычислений. В самом деле, для получения обратной матрицы к матрице n-го порядка согласно (5.3) требуется вычислить n^2 определителей $(n-1)$-го порядка и один определитель n-го порядка. В вычислительной математике используются различные дополнительные приемы вычисления обратной матрицы, которые по объему вычислений равносильны вычислению всего лишь двух определителей n-го порядка. Опишем один из них.

Теорема 5.4. *Произвольная невырожденная матрица элементарными преобразованиями только строк (только столбцов) приводится к единичной матрице.*

Доказательство. Рассмотрим строчный вариант теоремы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\det A \neq 0$. Применим к матрице A основной процесс (теорема 3.1). Так как A – квадратная матрица, то окончательная ступенчатая матрица будет треугольной. Ввиду невырожденности исходной матрицы она также будет невырожденной и ее диагональные элементы будут отличны от нуля. Разделив каждую *строку*

на ее диагональный элемент, т.е. выполнив элементарные преобразования строк, получим треугольную матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Если представить процесс приведения матрицы к верхней ступенчатой форме как преобразование матрицы "слева направо" (в таком порядке аннулируются столбцы), то теперь будем выполнять аналогичные преобразования "справа налево". На первом шаге с помощью последней строки аннулируем все наддиагональные элементы последнего столбца, вычитая из первых $(n-1)$ строк последнюю строку, умноженную на $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1,n}$ соответственно. На втором шаге из первых $(n-2)$ строк вычитаем $(n-1)$-ю строку, умноженную на $a_{1,n-1}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n-2,n-1}$ соответственно. Выполнив аналогичные преобразования, через $(n-1)$ шагов получим единичную матрицу. Отметим, что на каждом шаге изменяются элементы только одного аннулируемого столбца. Если в доказательстве поменять ролями строки и столбцы, то получим утверждение столбцового варианта теоремы. ■

Доказанная теорема может быть переформулирована в терминах матриц элементарных преобразований (теорема 3.2). Для строчного варианта: *существуют матрицы элементарных преобразований* $L_1, L_2, \dots, L_k$ *такие, что* $L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 A = I$. Отсюда в силу теоремы 5.3 следует, что

$$A^{-1} = L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 \quad \text{или} \quad A^{-1} = L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 I.$$

Это означает, что *для получения обратной матрицы достаточно к строкам единичной матрицы* I *применить те преобразования, которые приводят матрицу* A *к единичной матрице.* Для этого удобно составить расширенную матрицу $[A|I]$ и над строками этой матрицы выполнить те преобразования, которые матрицу A приводят к единичной; тогда на месте матрицы I окажется обратная матрица A^{-1}. Итак,

$$\boxed{A \mid I} \overset{\text{преобразования строк}}{\longmapsto} \boxed{I \mid A^{-1}}. \tag{5.5}$$

Аналогично в столбцовом варианте имеем

$$\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline I \\ \hline \end{array} \overset{\text{преобразования столбцов}}{\longmapsto} \begin{array}{|c|}\hline I \\ \hline A^{-1} \\ \hline \end{array}. \tag{5.6}$$

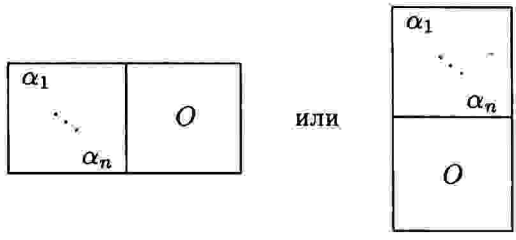
Этот метод вычисления обратной матрицы называется *методом Жордана* или *методом Гаусса–Жордана.*

Замечание. Если в расширенных матрицах (5.5) и (5.6) единичную матрицу I заменить матрицей B, то вместо матрицы A^{-1} получим в первом случае матрицу $A^{-1}B$, а во втором – матрицу BA^{-1}:

так как $A^{-1}B = L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 B$, $\quad BA^{-1} = BL_1 L_2 \dots L_k$.

Приведение к диагональной форме. Незначительным изменением процесса, описанного в доказательстве теоремы 5.4, можно привести квадратную матрицу A общего вида к диагональной форме. Для этого достаточно элементарными преобразованиями строк и столбцов привести матрицу A к верхней трапециевидной форме, разделить каждую ненулевую строку трапециевидной матрицы на свой диагональный элемент, затем с помощью первого столбца аннулировать все наддиагональные элементы первой строки, с помощью второго столбца – все наддиагональные элементы второй строки, и т. д.

Этот же процесс, примененный к прямоугольной матрице, приведет ее к форме, называемой *прямоугольной диагональной формой:*



***LU*-разложение матрицы.** Из первой части доказательства теоремы 5.4 следует, что любая невырожденная матрица элементарными преобразованиями строк 1-го и 3-го типов приводится к верхней треугольной форме (5.4). На языке матриц элементарных преобразований это означает, что существуют нижние треугольные матрицы $L_1, \dots, L_k$ (см.(3.1)), такие, что

$$L_k L_{k-1} \dots L_1 A = U \quad \text{или} \quad A = L_1^{-1} \dots L_{k-1}^{-1} L_k^{-1} U. \tag{5.7}$$

Отметим, что среди матриц $L_1, \dots, L_k$ (а следовательно, и среди матриц $L_1^{-1}, \dots, L_k^{-1}$) нижними треугольными являются лишь те, которые соответствуют элементарным преобразованиям строк 3-го типа.

Выделим класс невырожденных матриц, для котрых в основном процессе приведения к верхней треугольной форме можно обойтись

без элементарных преобразований строки 1-го типа (т.е. перестановок строк).

Назовем *угловым минором* Δ_k порядка k квадратной матрицы A минор $M_{1,2,\ldots,k}^{1,2,\ldots,k}$, т.е. минор, расположенный в строках и столбцах с номерами $1, 2, \ldots, k$. Пусть в матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ все угловые миноры $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ отличны от нуля. Так как $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$, то элемент a_{11} можно выбрать ведущим элементом первого шага (см. доказательство теоремы 3.1). Кроме того, элементарные преобразования строк 3-го типа, выполняемые на первом шаге, не меняют значения всех угловых миноров матрицы A, поэтому все угловые миноры матрицы A_1, к которой применяются преобразования второго шага, также отличны от нуля. Тем самым, на втором шаге основного процесса также можно обойтись без перестановок строк и т.д.

Если все матрицы $L_1, \ldots, L_k$ в (5.7) – нижние треугольные, то и $L = L_1^{-1} \ldots L_{k-1}^{-1} L_k^{-1}$ – нижняя треугольная матрица (проверьте!).

Таким образом, *любая квадратная матрица A, у которой все угловые миноры отличны от нуля, может быть представлена в виде*

$$A = LU, \tag{5.8}$$

где L – нижняя, U – верхняя треугольная матрицы.

Представление (5.8) называется *LU-разложением матрицы A.*

Глава II. Теоретико-множественные понятия

Здесь излагаются первоначальные теоретико-множественные понятия, которые будут использоваться в последующих главах.

§ 6. Множества

Под *множеством* в математике понимается совокупность объектов, называемых *элементами* множества.

Как правило, множество обозначается прописной буквой какого-либо алфавита, а его элементы – строчными буквами того же или другого алфавита. Для некоторых множеств приняты стандартные обозначения. Так, буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества всех натуральных, целых, рациональных, вещественных чисел. Множества с конечным числом элементов могут быть описаны путем явного перечисления всех их элементов, элементы при этом заключаются в фигурные скобки. Например, $\{0, 1, 2\}$ – множество остатков от деления целых чисел на число 3.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*. Мы будем обозначать его символом $\emptyset$.

Множество S называется *подмножеством* множества X, если имеет место импликация: $x \in S \Rightarrow x \in X$. Обозначение: $S \subset X$. Пустое множество по определению является подмножеством любого множества.

Для задания подмножества $S \subset X$ используется его характеристическое свойство, т.е. свойство, присущее только элементам из S. Так, запись $\{n = 2k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ задает множество всех четных чисел.

Два множества X и Y называются *равными*, если каждое из них является подмножеством другого, т.е.

$$X = Y \iff \begin{cases} X \subset Y, \\ Y \subset X. \end{cases} \tag{6.1}$$

Если $S \subset X$, причем $S \neq \emptyset$, $S \neq X$, то S называется *собственным подмножеством* множества X.

Объединением (*суммой* или *соединением*) множеств X и Y называется множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X или Y.

Обозначение: $X \cup Y$. Итак, $X \cup Y = \{x \,|\, x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

Пересечением множеств X и Y называется множество всех элементов, одновременно принадлежащих как X, так и Y.

Обозначение: $X \cap Y$. Итак, $X \cap Y = \{x \,|\, x \in X, x \in Y\}$.

Разностью множеств X и Y называется множество всех элементов из X, которые не содержатся в Y.

Обозначение: $X\backslash Y$ или $X-Y$. Итак, $X\backslash Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$.

Если $Y \subset X$, то разность $X\backslash Y$ называется *дополнением* множества Y до множества X. Обозначение: $\overline{Y}$, CY или $\mathbf{C}_X Y$.

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), в которых $x \in X, y \in Y$.

Обозначение: $X \times Y$. Итак, $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Декартово произведение $X \times X$ называется *декартовым квадратом* множества X и обозначается символом X^2. Множество всех пар (x, x), где $x \in X$, называется *диагональю* декартова квадрата множества X.

Примеры. 1. Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел можно рассматривать как декартово произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

2. Множество декартовых координат всех точек плоскости представляет собой декартов квадрат $\mathbb{R}^2$.

3. Если упорядоченную пару (a, b) вещественных чисел изображать точкой плоскости с абсциссой a и ординатой b, то декартовы произведения $X \times Y$ и $Y \times X$ множеств, указанных на рис. 1, изобразятся точками соответствующих прямоугольников.

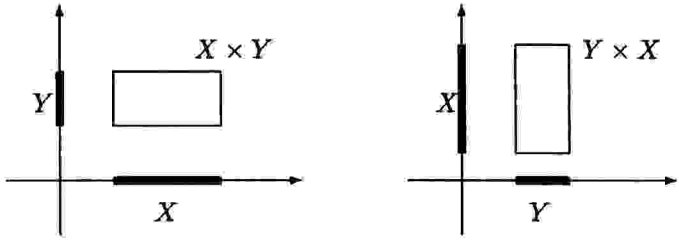


Рис. 1

§ 7. Эквивалентность

В математике, в логических рассуждениях, а также в обыденной жизни мы сталкиваемся с необходимостью сравнивать два элемента множества: равенство (и неравенство) двух чисел, равенство матриц, равенство множеств, подобие треугольников, эквивалентность уравнений и т.д. Во всех этих случаях между *двумя* элементами множества определено некоторое отношение, и в каждом случае введено *правило*, по которому устанавливается, находятся ли заданные два элемента в этом отношении или нет. Несмотря на разнообразие этих отношений, оказывается, что с математической точки зрения они являются конкретными проявлениями одного и того же понятия. Введем его.

Бинарное отношение. Говорят, что на множестве X задано *бинарное отношение* $\mathcal{R}$, если указано непустое подмножество $\mathcal{R}$ декартова квадрата этого множества. Если при этом $(x, y) \in \mathcal{R}$, то говорят, что элементы x и y связаны отношением $\mathcal{R}$, и обозначают символом $x\mathcal{R}y$.

Равенство $x = y$ и неравенство $x < y$ действительных чисел, равенство матриц $A = B$, равенство множеств $X = Y$ и пр. – все это примеры бинарных отношений. В самом деле, рассмотрим один из них – отношение "$<$" на множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. Пара чисел $x, y \in \mathbb{R}$, для которой $x < y$, является элементом $\mathbb{R}^2$.

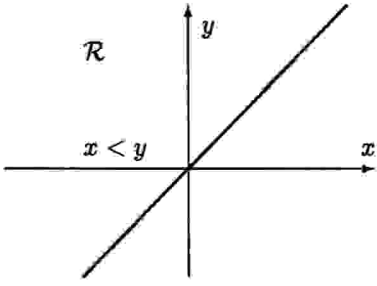


Рис. 2

Множество всех таких пар образует подмножество $\mathcal{R}$ декартова квадрата $\mathbb{R}^2$ – на рис. 2 они изображаются точками плоскости $\mathbb{R}^2$, которые лежат выше прямой $y = x$. Задание этого множества $\mathcal{R}$ определяет бинарное отношение на множестве действительных чисел, а отношение $x\mathcal{R}y$ (т.е. $(x, y) \in \mathcal{R}$) есть не что иное, как $x < y$.

Заметим, что бинарное отношение равенства вещественных чисел задается прямой $y = x$, т.е. диагональю декартова квадрата $\mathbb{R}^2$.

Бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве X называется:

- *рефлексивным*, если $x\mathcal{R}x, \forall x \in X$;
- *симметричным*, если имеет место импликация $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- *транзитивным*, если имеет место импликация $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Отношение эквивалентности. Важным классом бинарных отношений являются бинарные отношения, описывающие свойство "схожести", – отношения эквивалентности.

Бинарное отношение $\mathcal{E}$ на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если пара элементов $x, y \in X$ связана отношением эквивалентности, то говорят, что x и y *эквивалентны*, и обозначают это символом $x \sim y$. В конкретных случаях вместо этого символа могут быть использованы и другие, например $x = y$, $x \equiv y$.

Отношения эквивалентности играют важную роль в математических исследованиях. Назвав два элемента эквивалентными, мы игнорируем те различия между ними, которые не существенны в рассматриваемой задаче. В каждой конкретной задаче мы различаем или не различаем элементы лишь в отношении тех их свойств, которыми интересуемся в данный момент. Известное правило равенства обыкновенных дробей ($p_1/q_1 = p_2/q_2$, если $p_1q_2 = q_1p_2$) является отношением эквивалентности. Назвав дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ равными, мы игнорируем их несовпадение как дробей и считаем, что они определяют одно и то же рациональное число. Уже этот простейший пример подсказывает, что эквивалентные элементы множества целесообразно объединять в один объект.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\mathcal{E}$ и $a \in X$. Множество всевозможных элементов $x \in X$, эквивалентных a, называется *классом эквивалентности, порожденным элементом* a. Обозначение: $\mathrm{cl}(a)$. Итак, $\mathrm{cl}(a) = \{x \in X | x \sim a\}$. Любой элемент класса эквивалентности называется *представителем класса*.

Теорема 7.1. *Класс эквивалентности порождается любым своим представителем, т.е. если* $b \in \mathrm{cl}(a)$, *то* $\mathrm{cl}(b) = \mathrm{cl}(a)$.

Для доказательства равенства этих множеств достаточно показать двустороннее вложение (6.1) их друг в друга. Действительно,

$$c \in \mathrm{cl}\,(b) \Rightarrow c \sim b, \text{ но } b \sim a \Rightarrow c \sim a \Rightarrow c \in \mathrm{cl}\,(a),$$
$$c \in \mathrm{cl}\,(a) \Rightarrow c \sim a, \text{ но } a \sim b \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in \mathrm{cl}\,(b). \blacksquare$$

Теорема 7.2. *Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Действительно, любые два класса $\mathrm{cl}\,(a)$ и $\mathrm{cl}\,(b)$ либо не пересекаются, либо имеют хотя бы один общий элемент. Но в последнем случае они совпадают, так как если $c \in \mathrm{cl}\,(a)$, $c \in \mathrm{cl}\,(b)$, то в силу теоремы 7.1 $\mathrm{cl}\,(a) = \mathrm{cl}\,(b)$. $\blacksquare$

Из теоремы 7.2 и очевидного факта, что любой элемент множества содержится в одном из классов эквивалентности ($a \in \mathrm{cl}\,(a)$), следует, что все множество разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Множество всех классов эквивалентности называется *фактор-множеством множества X по отношению эквивалентности $\mathcal{E}$* и обозначается символом $X|\mathcal{E}$.

Как уже отмечалось выше, одни и те же элементы множества, эквивалентные при одном отношении эквивалентности, могут оказаться неэквивалентными при другом. Все зависит от задачи, а в разных задачах мы можем интересоваться различными свойствами одних и тех же элементов. Проиллюстрируем это на примерах различных отношений эквивалентности на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Примеры. 1. Положим $m \sim n$, если $m = n$. Это тривиальный пример отношения эквивалентности, сводящегося к простому совпадению. Очевидно, что $\mathrm{cl}\,(m) = \{m\}$ и $\mathbb{Z}|\mathcal{E} = \mathbb{Z}$.

2. Положим $m \sim n$, если m и n имеют одинаковую четность. Нетрудно проверить, что это бинарное отношение является отношением эквивалентности. Очевидно, что при таком отношении эквивалентности все множество $\mathbb{Z}$ разбивается на два класса эквивалентности: $C_0 = \mathrm{cl}\,(0) = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех четных чисел и $C_1 = \mathrm{cl}\,(1) = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех нечетных чисел. Итак, $\mathbb{Z}|\mathcal{E} = \{C_0, C_1\}$.

Такое разбиение множества целых чисел на классы нам знакомо из обыденной жизни, например, деление множества домов улицы на четную и нечетную сторону.

3. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Два целых числа m и n называются *сравнимыми по модулю p*, если при делении на p они дают одинаковые остатки, т.е. если $m - n = pk$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Обозначение: $m \equiv n (\mathrm{mod}\, p)$. Итак,

$$m \equiv n (\mathrm{mod}\, p) \iff m - n = pk, k \in \mathbb{Z}. \tag{7.1}$$

Положим $m \sim n$, если $m \equiv n (\mathrm{mod}\, p)$. Нетрудно проверить, что бинарное отношение (7.1) является отношением эквивалентности. Найдем классы эквивалентности. Пусть m при делении на p дает в остатке r. Очевидно, $0 \leq r \leq p-1$. Тогда $\mathrm{cl}\,(m) = \{n = pk + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех целых чисел n, дающих при делении на p остаток r. Так как при делении на p возможно ровно p различных

остатков: $0, 1, \ldots, p-1$, то количество классов эквивалентности равно p. Обозначения: $C_r = \{n = pk + r \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, где $0 \leq r \leq p-1$, и $\mathbb{Z}_p$ – фактор-множество множества $\mathbb{Z}$ по отношению эквивалентности (7.1). В этих обозначениях $\mathbb{Z}_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$. Множество $\mathbb{Z}_p$ называют *множеством классов вычетов по модулю* p.

§ 8. Отображения

Определения, простейшие свойства. Пусть X, Y – два множества. *Отображением* f множества X во множество Y называется закон, посредством которого произвольному элементу $x \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $y \in Y$; при этом элемент y называется *образом* элемента x , а элемент x – *прообразом* элемента y. Символически отображение записывается в виде $f : X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Запись $y = f(x)$ или $x \mapsto y$ означает, что элемент x при отображении f переходит в элемент y.

Отображение множества X во множество Y называют также *преобразованием множества* X в Y, или *оператором*, действующим из множества X во множество Y, или *функцией*, определенной на X со значениями в Y. Все эти названия употребляются в одинаковом смысле, и их использование диктуется соображениями удобства или желанием подчеркнуть тот или иной аспект. В случае $X = Y$ говорят об *отображении в себя*.

Полным прообразом элемента $y \in Y$ называется множество[1]

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}.$$

Образом отображения f называется множество

$$\operatorname{im} f = \{y = f(x) | x \in X\}.$$

Вместо символа $\operatorname{im} f$ используется также символ $f(X)$.

Отображение $f : X \to Y$ называется:

• *инъективным*, если из того, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, или, другими словами, если уравнение

$$f(x) = y \tag{8.1}$$

при любом $y \in Y$ имеет не более одного решения;

• *сюръективным* или *отображением на*, если $\operatorname{im} f = Y$, или, другими словами, если уравнение (8.1) при любом $y \in Y$ имеет хотя бы одно решение;

• *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно и инъективно, и сюръективно, или, другими словами, если уравнение (8.1) при любом $y \in Y$ имеет, и притом единственное, решение.

Примеры. 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ – множество всех неотрицательных действительных чисел. Соответствие $a \mapsto |a|$ определяет три

[1] Символ $f^{-1}(y)$ не следует ассоциировать с обратным отображением (8.5), которое может и не существовать.

различных отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Отображение f не инъективно и не сюръективно, g – не инъективно, но сюръективно, h – биективно.

2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Соответствие $A \mapsto \det A$ определяет отображение $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, не инъективное, но сюръективное.

3. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Соответствие $(a, b) \mapsto a+b$ определяет отображение $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не инъективное, но сюръективное. Таким образом, операцию сложения чисел можно рассматривать как отображение декартова квадрата множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем.

Два отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *равными*, если $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$. Обозначение: $f = g$.

Тождественным (единичным) отображением на множестве X называется отображение $e_X : X \to X$, которое переводит каждый элемент $x \in X$ в себя.

Произведение отображений. *Произведением (суперпозицией или композицией)* отображений $g : X \to Y$ и $f : Y \to Z$ называется отображение $fg : X \to Z$, определенное правилом

$$fg(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in X. \tag{8.2}$$

Таким образом, произведение отображений есть последовательное выполнение отображений-сомножителей, причем если символ отображения рассматривать как рецепт для выполнения определенных действий, то символ произведения fg следует читать справа налево.

Заметим, что произведение отображений некоммутативно. Даже в случаях, когда оба произведения fg и gf имеют смысл, произведение, вообще говоря, зависит от порядка выполнения отображений. В этом легко убедиться на примере, когда $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$, $g(x) = |x|$.

Произведение отображений обладает следующими свойствами.

1. $fe_X = f$; $e_Y f = f$ *для любого отображения* $f : X \to Y$. Проверка этого свойства предоставляется читателю.

2. *Произведение отображений ассоциативно, т.е. если* $h : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $f : Z \to U$, *то* $f(gh) = (fg)h$.

Доказательство. В соответствии с определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отображений $f(gh) : X \to U$ и $(fg)h : X \to U$ в произвольной "точке" $x \in X$. Согласно определению (8.2) произведения отображений имеем

$$(f(gh))(x) = f((gh)(x)) = f(g(h(x))) = (fg)(h(x)) = ((fg)h)(x). \quad \blacksquare$$

3. *Произведение инъективных (сюръективных, биективных) отображений инъективно (соответственно сюръективно, биективно).*

Доказательство. Пусть $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ – инъективные отображения и пусть $x_1 \neq x_2$. Тогда из инъективности g следует, что $g(x_1) \neq g(x_2)$, а из инъективности f следует, что $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$, т.е. $fg(x_1) \neq fg(x_2)$.

Пусть теперь f и g сюръективны. Тогда для любого $z \in Z$ в силу сюръективности f существует $y \in Y$ такой, что $z = f(y)$. Но для этого элемента y в силу сюръективности g существует элемент $x \in X$ такой, что $y = g(x)$. Таким образом, для любого элемента $z \in Z$ существует элемент $x \in X$ такой, что $z = f(g(x))$, т.е. $z = fg(x)$. Биективность вытекает из сюръективности и инъективности. ■

Обратное отображение. Пусть $f : X \to Y$. Отображение $f^{-1} : Y \to X$ называется *обратным* к отображению f, если

$$f^{-1}f = e_X, \quad ff^{-1} = e_Y. \tag{8.3}$$

Заметим, что из этого определения следует, что f – обратное отображение к отображению f^{-1}. Отображение, для которого существует обратное отображение, называется *обратимым*.

Если выполнено только одно из равенств (8.3), то отбражение f^{-1} называется соответственно *левым* или *правым обратным*.

Теорема 8.1 (критерий обратимости). *Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.*

Лемма. *Если $g : X \to Y$, $f : Y \to X$ и $fg = e_X$, то g инъективно, а f сюръективно.*

Действительно, если g не инъективно, то существуют элементы $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x_1 \neq x_2$, а $g(x_1) = g(x_2)$. Тогда $x_1 = e_X(x_1) = fg(x_1) = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = fg(x_2) = e_X(x_2) = x_2$. Следовательно, g инъективно. Далее, если x – произвольный элемент X, то $x = e_X(x) = fg(x) = f(g(x)) = f(y)$, где $y = g(x) \in Y$. Это доказывает сюръективность f. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть f обратимо. Тогда из (8.3) и леммы следует, что f инъективно и сюръективно, т.е. f биективно.

Достаточность. Пусть f биективно, тогда для любого $y \in Y$ существует единственный прообраз $x \in X$. Построим отображение $g : Y \to X$, положив $g(y) = x$. Тогда для любого $y \in Y$ имеем $(fg)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$, т.е. $fg = e_Y$, а для любого $x \in X$ имеем $(gf)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, т.е. $gf = e_X$. Таким образом, $g = f^{-1}$ и f обратимо. ■

Отметим еще два свойства обратимых отображений.

1. *Обратное отображение единственно*, так как если f_1^{-1}, f_2^{-1} – два обратных отображения к отображению $f : X \to Y$, то $f_1^{-1} = f_1^{-1}e_Y = f_1^{-1}(ff_2^{-1}) = (f_1^{-1}f)f_2^{-1} = e_X f_2^{-1} = f_2^{-1}$.

2. *Произведение обратимых отображений обратимо, при этом* $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$. Действительно, произведение fg обратимо как произведение биективных отображений, при этом $(fg)(g^{-1}f^{-1}) = f(gg^{-1})f^{-1} = ff^{-1} = e_Y$, $(g^{-1}f^{-1})(fg) = g^{-1}(f^{-1}f)g = g^{-1}g = e_X$.

Перестановки (подстановки) n-го порядка. Пусть X — конечное множество, состоящее из n элементов. Перенумеруем эти элементы и будем считать, что $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. При биективном отображении f множества X на себя его элементы преобразуются следующим

образом: $f(1) = \alpha_1$, $f(2) = \alpha_2, \ldots, f(n) = \alpha_n$, где $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Таким образом, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — перестановка из первых n натуральных чисел. Биективное отображение f конечного множества X на себя называется *перестановкой (или подстановкой) n-го порядка.*

Обозначение:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

или

$$f = (\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n). \tag{8.5}$$

В записи (8.4) отображение f чаще называют подстановкой, а в записи (8.5) – перестановкой. Очевидно, перестановка столбцов в (8.4) дает другую запись той же подстановки:

$$f = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – перестановки из первых n натуральных чисел и $\gamma_k = f(\beta_k)$, $k = \overline{1, n}$.

Подстановка (8.6) называется *четной*, если перестановки $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ имеют одинаковую четность, т.е. если $\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$ – четно, и *нечетной* в противном случае.

Пусть S_n – множество всех подстановок n-го порядка. Произведение fg подстановок $f, g \in S_n$ снова будет подстановкой из S_n (как произведение биективных отображений) и выполняется по правилу

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \ldots & f(g(n)) \end{pmatrix}.$$

Подстановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

называется *тождественной*, подстановка

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

является обратной к подстановке (8.6).

§ 9. Алгебраические законы

Внутренний закон композиции. *Внутренним законом композиции (алгебраической операцией)* на множестве X называется отображение

$$* : X \times X \to X,$$

т.е. закон, посредством которого любой упорядоченной паре элементов $a, b \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $c \in X$. Тот факт, что $(a, b) \mapsto c$, записывается символически в виде $a * b = c$. В конкретных случаях вместо символа $*$ используют символы $+$, $-$, $\times$, $:$ и др.

Примеры. 1. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ операции сложения и умножения чисел являются алгебраическими операциями, так как любые два натуральных числа можно сложить (и умножить), при этом результатом будет также натуральное число.

На этом же множестве операции вычитания и деления не являются алгебраическими операциями, так как результаты выполнения этих операций не всегда будут натуральными числами.

2. На множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ операции сложения, вычитания, умножения (но не деления) чисел будут алгебраическими операциями.

3. На множестве ненулевых вещественных чисел $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ операции умножения и деления (но не сложения и вычитания) будут алгебраическими операциями.

4. На множестве $\mathbb{R}^{m\times n}$ матриц размера $m \times n$, где $m \neq n$, операции сложения и вычитания (но не умножения) матриц являются алгебраическими операциями.

5. На множестве $\mathbb{R}^{n\times n}$ квадратных матриц n-го порядка операции сложения, вычитания и умножения матриц – алгебраические операции.

6. На множестве S_n подстановок n-го порядка умножение подстановок является алгебраической операцией.

Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется:

- *коммутативной*, если $a * b = b * a, \quad \forall a, b \in X$,
- *ассоциативной*, если $(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in X$.

Операции сложения и умножения чисел в $\mathbb{R}$ коммутативны и ассоциативны. Сложение матриц, как уже отмечалось в §2, также коммутативно и ассоциативно. Примером некоммутативной, но ассоциативной алгебраической операции могут служить операции умножения матриц в $\mathbb{R}^{n\times n}$ и суперпозиции отображений на множестве всех отображений множества X в себя.

Обобщенная ассоциативность. Свойство ассоциативности алгебраической операции означает, что результат применения операции к трем элементам не зависит от распределения скобок, указывающих на порядок последовательного применения операции к парам элемен-

тов. Для ассоциативной операции это же верно и для любого конечного числа n элементов.

Теорема 9.1. *Если алгебраическая операция $*$ на множестве X ассоциативна, то результат ее применения к n элементам не зависит от расстановки скобок, лишь бы скобки объединяли пары элементов, указывая на порядок последовательного применения операции к двум элементам.*

Доказательство. Докажем индукцией по n. Для $n = 3$ оно, очевидно, верно. Пусть утверждение верно для любого $k < n$, докажем его для $k = n$. Пусть в выражении $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ произвольным образом расставлены скобки. Заметим, что последним шагом будет всегда выполнение операции над двумя элементами $a_1 * \cdots * a_k$ и $a_{k+1} * \cdots * a_n$, $1 \leq k \leq n-1$. Так как $k < n$, то оба выражения не зависят от распределения скобок. Осталось показать, что

$$(a_1 * \cdots * a_k) * (a_{k+1} * \cdots * a_n) = (a_1 * \cdots * a_m) * (a_{m+1} * \cdots * a_n),$$

где $1 \leq m \leq n-1$. Пусть $k < m$. Обозначим $a_1 * \cdots * a_k = a$, $a_{k+1} * \cdots * a_m = b$, $a_{m+1} * \cdots * a_n = c$.

Надо показать, что $a * (b * c) = (a * b) * c$, а это действительно верно. ■

Элемент $e \in X$ называется *нейтральным элементом множества X относительно алгебраической операции $*$*, если $\forall a \in X$:

$$a * e = e * a = a.$$

Примеры. 1. Очевидно, что число $0 \in \mathbb{R}$ является нейтральным элементом относительно операции сложения чисел в $\mathbb{R}$, а матрица $O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – нейтральным элементом относительно сложения матриц в $\mathbb{R}^{m \times n}$. Операции вычитания чисел и матриц не обладают нейтральными элементами.

2. Также очевидно, что $1 \in \mathbb{R}$ и $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ являются нейтральными элементами относительно операций умножения чисел в $\mathbb{R}$ и матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$ соответственно. Операция умножения на множестве всех четных чисел, являясь алгебраической операцией, не обладает нейтральным элементом.

Теорема 9.2. *Нейтральный элемент единствен.*

Доказательство. Действительно, если e_1 и e_2 – два нейтральных элемента, то $e_1 * e_2 = e_1$, так как e_2 – нейтральный элемент, и $e_1 * e_2 = e_2$, так как e_1 – нейтральный элемент. Значит, $e_1 = e_2$. ■

Пусть $*$ – алгебраическая операция на множестве X, обладающая нейтральным элементом e. Элемент x' называется *симметричным элементом* для элемента $x \in X$, если $x * x' = x' * x = e$.

Примеры. Очевидно, что любое число $a \in \mathbb{R}$ и любая матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обладают симметричным элементом относительно операции сложения: ими являются соответственно противоположное число $-a$ и противоположная матрица $-A$.

Что же касается умножения чисел в $\mathbb{R}$ и умножения матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$, то не каждый элемент обладает симметричным: только нену-

левое число $a \in \mathbb{R}$ и невырожденная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеют симметричные элементы: ими являются соответственно обратное число a^{-1} и обратная матрица A^{-1} (§5).

Теорема 9.3. *Симметричный элемент относительно ассоциативной алгебраической операции единствен.*

Доказательство. Действительно, если x' и x'' – два симметричных элемента к элементу $x \in X$, то

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''. \quad \blacksquare$$

Замечание. В определении нейтрального и симметричного элементов мы считали, что $x*e = e*x = x$ и $x*x' = x'*x = e$. Но можно рассматривать только равенства $x*e = x$ и $x*x' = e$ (или $e*x = x$ и $x'*x = e$) и говорить о *правом нейтральном* и *правом симметричном* элементах (или о *левом нейтральном* и *левом симметричном*). Этим обобщением мы будем иногда пользоваться.

Говорят, что алгебраическая операция $*$ на множестве X обладает *обратной операцией*, если для любых двух элементов $a, b \in X$ уравнения $a*x = b$ и $y*a = b$ имеют единственное решение.

Наличие обратной операции означает существование двух алгебраических операций. Первая ставит в соответствие любой упорядоченной паре элементов $a, b \in X$ однозначно определенный элемент $x \in X$ такой, что $a*x = b$, и называется *правой обратной операцией* к операции $*$, а вторая – элемент $y \in X$ такой, что $y*a = b$, и называется *левой обратной операцией*. Но если алгебраическая операция $*$ коммутативна, то $x = y$ и обе операции совпадают и определяют *обратную операцию* к операции $*$. Очевидно, вычитание чисел в $\mathbb{R}$ и вычитание матриц в $\mathbb{R}^{m\times n}$ – операции, обратные к операции сложения в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Пусть $*_1$ и $*_2$ – две алгебраические операции на множестве X. Алгебраическая операция $*_1$ называется *дистрибутивной справа* относительно алгебраической операции $*_2$, если

$$(a *_2 b) *_1 c = (a *_1 c) *_2 (b *_1 c), \quad \forall a, b, c \in X;$$

дистрибутивной слева, если

$$a *_1 (b *_2 c) = (a *_1 b) *_2 (a *_1 c), \quad \forall a, b, c \in X;$$

и *дистрибутивной*, если она дистрибутивна и справа и слева.

Пример. Умножение чисел в $\mathbb{R}$ (матриц в $\mathbb{R}^{n\times n}$) дистрибутивно относительно сложения в $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{n\times n}$ соответственно). Но сложение не дистрибутивно относительно умножения.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности. Нами уже отмечалось в §7, что, назвав элементы множества эквивалентными, мы ожидаем, что в одной и той же ситуации они должны проявлять себя одинаково. В первую очередь это относится к алгебраическим операциям, в которых участвуют эквивалентные элементы. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *согласованной* с отношением эквивалентности $\sim$ на этом множестве, если из того, что $a_1 \sim a_2, b_1 \sim b_2$, следует, что $a_1 * b_1 \sim a_2 * b_2$, т.е. алгебраическая операция, примененная к эквивалентным элементам, дает эквивалентные результаты. Это заставляет нас при введении тех или иных алгебраических операций проверять выполнение этого требования. Мы не будем останавливаться на этом, а предлагаем читателю самому убедиться в справедливости данного свойства у всех рассматриваемых операций.

Заметим, что в наших рассуждениях, говоря о внутренних законах композиции, мы всюду использовали термин "алгебраическая операция". Это не случайно. Как правило, термин "внутренний закон композиции" используют в тех случаях, когда наряду с внутренним законом композиции рассматривается и внешний закон композиции.

Внешний закон композиции. Пусть X и P – два множества. *Внешним законом композиции на множестве* X называется отображение

$$(\cdot): \quad P \times X \to X,$$

т.е. закон, посредством которого любому элементу $\alpha \in P$ и любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $c \in X$. Тот факт, что $(\alpha, x) \mapsto c$, обозначается символом $c = \alpha x$.

Умножение матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ является внешним законом композиции на множестве $\mathbb{R}^{m\times n}$. Умножение чисел в $\mathbb{R}$ можно рассматривать и как внутренний закон композиции, и как внешний.

Внешний закон композиции на множестве X называется *дистрибутивным относительно внутреннего закона композиции* $*$ в X, если

$$\alpha(a * b) = \alpha a * \alpha b, \quad \forall \alpha \in P, \forall a, b \in X.$$

Внешний закон композиции на множестве X называется *дистрибутивным относительно внутреннего закона композиции* $*'$ в P, если

$$(\alpha *' \beta)a = \alpha a * \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in P, \forall a \in X.$$

Умножение матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ дистрибутивно как относительно сложения матриц, так и относительно сложения чисел, ибо $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Глава III. Геометрические векторы

Основными объектами геометрических исследований являются точки, прямые и плоскости в пространстве.

С математической точки зрения логически безупречным методом введения этих понятий является аксиоматический метод, получивший завершение в трудах Гильберта. Существуют различные версии аксиом евклидовой геометрии. Мы оставим в стороне эти исследования, ограничившись ссылкой на Приложение к этой книге и формулировками тех фактов, на которые непосредственно будем опираться.

Отрезок $[AB]$ – это множество, состоящее из точек A и B и всех точек прямой (AB), которые лежат между точками A и B. Каждому отрезку $[AB]$ можно поставить в соответствие неотрицательное действительное число $|AB|$, называемое *длиной отрезка* $[AB]$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) аксиома тождества:
   $|AB| \geq 0$, $\forall A, B$,
   $|AB| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$;
2) аксиома симметрии:
   $|AB| = |BA|$, $\forall A, B$;
3) неравенство треугольника:
   $|AB| \leq |AC| + |CB|$, $\forall A, B, C$,
   $|AB| = |AC| + |CB|$ тогда и только тогда, когда точка C лежит на отрезке $[AB]$.

Длина отрезка $[AB]$ называется также *расстоянием* между точками A и B и обозначается символом $\rho(A, B)$.

Любая точка A, лежащая на прямой l, разбивает эту прямую на два *луча* l_+ и l_- с началами в точке A. Эти лучи называются *дополнительными* друг к другу. Точка A принадлежит обоим лучам. Две точки $B \neq A$ и $C \neq A$ прямой l принадлежат одному лучу тогда и только тогда, когда отрезок $[BC]$ не содержит точки A, и принадлежат дополнительным лучам, если точка A является внутренней точкой отрезка $[BC]$. Луч с началом в точке A, на котором лежит точка $B \neq A$, обозначается символом $[AB)$.

Два луча, лежащие на одной прямой, называются *одинаково направленными* (*сонаправленными*), если их пересечение есть луч, и *противоположно направленными*, если их пересечение не является лучом.

Всякая прямая l, лежащая в плоскости P, разбивает эту плоскость на две полуплоскости P_+ и P_-, про которые говорят, что они *определяются прямой* l. Прямая l принадлежит каждой из этих полуплоскостей. Две точки $B \notin l$ и $C \notin l$ плоскости P лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой l, тогда и только тогда, когда $[BC] \cap l = \emptyset$.

Два луча $[AB)$ и $[CD)$, лежащие на параллельных несовпадающих прямых, принадлежат некоторой плоскости P. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *одинаково направленными* (*сонаправленными*), если они лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой AC, и *противоположно направленными*, если они лежат в разных полуплоскостях. Обозначение: $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$ и $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$ соответственно. Свойство сонаправленности лучей транзитивно.

Пусть P – некоторая плоскость и A, B, O – три ее различные точки, не лежащие на одной прямой. Прямая OA разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Точка B расположена в одной из них. Обозначим эту полуплоскость P_+. Аналогично прямая OB разбивает плоскость P на две полуплоскости. Пусть P_- – полуплоскость, в которой лежит точка A. *Выпуклым углом между лучами* $[OA)$ и $[OB)$ называется пересечение множеств P_+ и P_-. Обозначение: $\angle AOB$. Итак,

$\angle AOB = P_+ \cap P_-$. Величина выпуклого угла $\angle AOB$ называется *углом между лучами* $[OA)$ и $[OB)$. Обозначение: $\widehat{AOB}$. Очевидно, $0 < \widehat{AOB} < \pi$. По определению угол между сонаправленными лучами равен 0, а между противоположно направленными равен π.

§ 10. Направленные отрезки

Упорядоченная пара точек (A, B) называется *направленным отрезком* с началом в точке A и концом в точке B. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$.

Рис. 1

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображается стрелкой, идущей из его начала в его конец (рис. 1). Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называют также *связанным вектором*, а точку A – *точкой* его *приложения*. Если точки A и B различны, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *ненулевым*; если же точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, точнее, $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым* и обозначается символом θ_A.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *параллельным прямой* l (*плоскости* P), если либо он нулевой, либо прямая AB совпадает с прямой l (соответственно лежит в плоскости P), либо прямая AB параллельна прямой l (соответственно плоскости P).

Обозначение: $\overrightarrow{AB} \parallel l$, $\overrightarrow{AB} \parallel P$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, …, $\overrightarrow{A_kB_k}$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если существует прямая (соответственно плоскость), которой параллелен каждый из этих отрезков.

Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка $[AB]$. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$. Как следует из определения, длина нулевого и только нулевого направленного отрезка равна нулю.

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *одинаково направленными* (*сонаправленными*), если лучи $[AB)$ и $[CD)$ имеют одинаковое направление, и *противоположно направленными*, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ имеют противоположные направления.

Обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ соответственно.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если середины отрезков $[AD]$ и $[BC]$ совпадают (рис. 2).

Обозначение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Как следует из определения, нулевой направленный отрезок равен любому другому нулевому и только нулевому направленному отрезку.

Из свойств параллелограмма (рис. 2) следует, что ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, не лежащие на одной прямой, равны тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABDC$ – параллелограмм. Для равных ненулевых отрезков, лежащих на одной прямой,

возможен один из четырех вариантов расположения, изображенных на рис. 2, *а* и *б*.

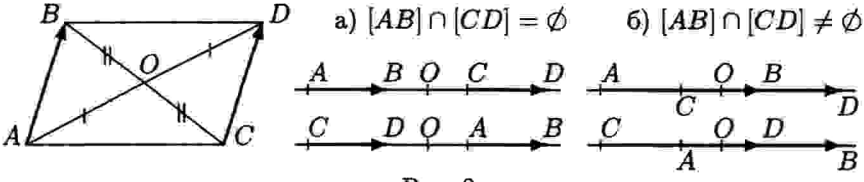


Рис. 2

Теорема 10.1. *Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда они имеют:*

1) одинаковую длину: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

и, в случае $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$,

2) одинаковое направление: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Утверждение теоремы вытекает непосредственно из определения равенства направленных отрезков и свойств параллелограмма (рис. 3). ■

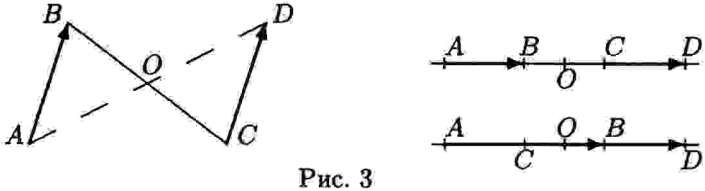


Рис. 3

Теорема 10.2. *Для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и любой точки C существует, и притом единственная, точка D такая, что* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Доказательство. Пусть (рис. 3) точка O – середина $[BC]$. Из определения равенства направленных отрезков следует, что D – точка на прямой AO, симметричная точке A относительно точки O. Такая точка определена однозначно. ■

Замечание. Теорему 10.2 формулируют и в других терминах: *направленный отрезок можно отложить от любой точки* или *направленный отрезок можно перенести в любую точку.*

Теорема 10.3. *Отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности на множестве всех направленных отрезков.*

В самом деле, отношение равенства направленных отрезков является бинарным отношением, которое обладает свойствами:

а) рефлексивности (направленный отрезок равен самому себе);

б) симметричности, так как справедливы импликации

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}|, \qquad \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB};$$

в) транзитивности, так как равенство длин (т.е. чисел) и сонаправленность направленных отрезков (т.е. лучей) обладают этим свойством. ■

Прямая l с заданным на ней направлением называется *осью*. *Величиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на оси l называется число

$$(\overrightarrow{AB}) = \begin{cases} |\overrightarrow{AB}|, & \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow l, \\ -|\overrightarrow{AB}|, & \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow l. \end{cases} \tag{10.1}$$

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Нулевые направленные отрезки, и только они, имеют нулевую величину.

2°. $(\overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{BA})$.

Лемма Шаля. *При любом расположении точек A, B и C на прямой имеет место равенство*

$$(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB}).$$

Доказательство. Если какие-либо две точки совпадают (например, $A = B$), то утверждение очевидно, так как $(\overrightarrow{AA}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA})$. Пусть A, B, C – различные точки. Тогда возможны только три варианта расположения этих точек:

1) точка C лежит между точками A и B (рис. 4);

Рис. 4

2) точка A лежит между точками B и C;

3) точка B лежит между точками A и C.

В первом случае, как видно из рис. 4, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, откуда следует, что $(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB})$. Отсюда во втором случае имеем $(\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC})$ или $(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB})$. Третий случай рассматривается аналогично второму. ■

§ 11. Свободный вектор

Определение и терминология. Известно (теорема 10.3), что отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности на множестве направленных отрезков. Оно разбивает это множество на непересекающиеся классы эквивалентности (§7).

Класс эквивалентности направленных отрезков называется *свободным вектором* или просто *вектором*. Векторы обозначают строчными латинскими буквами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Итак, вектор $\mathbf{a} = \mathrm{cl}\,(\overrightarrow{AB})$ состоит из всех направленных отрезков, равных $\overrightarrow{AB}$. Так как класс эквивалентности (§7) порождается любым своим представителем, то вектор $\mathbf{a} = \mathrm{cl}\,(\overrightarrow{AB})$ можно задать любым направленным отрезком $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$,

т.е. $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{CD})$. Если вместо направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ используется направленный отрезок $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, то говорят, что вектор $\mathbf{a}$ отложен от точки C. Символ $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{AB})$ используется применительно к геометрическому вектору $\mathbf{a}$ только в тех ситуациях, когда подчеркивается отношение этого вектора к классу эквивалентности. Обычно вместо символа $\mathbf{a} = \mathrm{cl}(\overrightarrow{AB})$ используется символ $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, который в зависимости от контекста читается как "вектор $\mathbf{a}$, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$" или "вектор $\mathbf{a}$, отложенный от точки A".

Длиной вектора $\mathbf{a}$ (*величиной вектора* $\mathbf{a}$ *на оси*) называется длина (соответственно величина) порождающего его направленного отрезка; векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если коллинеарны (соответственно компланарны) порождающие их направленные отрезки; векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *одинаково направленными* (*противоположно направленными*), если одинаково (соответственно противоположно) направлены порождающие их направленные отрезки. Очевидно, что эти определения корректны несмотря на произвол в выборе направленных отрезков.

Линейные операции над векторами.

Сложение векторов. Сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется следующим образом. Отложим вектор $\mathbf{a}$ от произвольной точки A, пусть B – конец этого вектора, т.е. $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Затем отложим вектор $\mathbf{b}$ от точки B, пусть $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. *Суммой* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$ (рис. 1).

Рис. 1

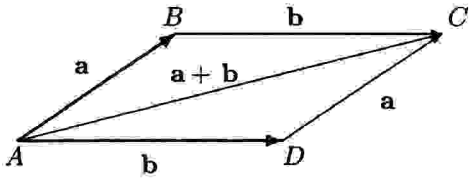


Рис. 2

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*. Очевидно, что этот же вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ для неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть получен (рис. 2) как диагональ параллелограм-

ма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Это правило сложения векторов называется *правилом параллелограмма.*

Теорема 11.1. *Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:*

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *(свойство коммутативности);*

2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *(свойство ассоциативности);*

3) существует такой вектор $\mathbf{0}$*, называемый нулевым вектором, что* $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}$ *(свойство существования нейтрального элемента);*

4) для любого вектора $\mathbf{a}$ *существует такой вектор* $-\mathbf{a}$ *(называемый противоположным вектору* $\mathbf{a}$*), что* $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$ *(свойство существования симметричного элемента).*

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность сложения в случае неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ проверяются непосредственным построением (рис. 3) векторов, входящих в левую и правую части соответствующих равенств. Случай коллинеарных векторов предлагается рассмотреть читателю.

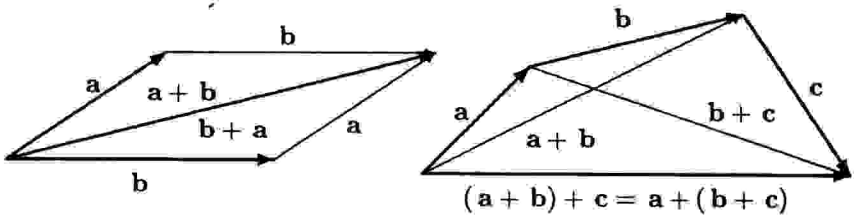


Рис. 3

Свойства 3 и 4 очевидны: нулевым вектором $\mathbf{0}$ будет класс эквивалентности нулевых направленных отрезков, противоположным вектору $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ будет вектор $-\mathbf{a}=\overrightarrow{BA}$. ■

Разностью векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ называется вектор $\mathbf{x}$ такой, что $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Обозначение: $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Теорема 11.2. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *существует, и притом единственная, разность* $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Доказательство. В качестве разности $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ можно взять вектор $\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$, так как $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+(-\mathbf{a}))=\mathbf{a}+((-\mathbf{a})+\mathbf{b})=(\mathbf{a}+(-\mathbf{a}))+\mathbf{b}=\mathbf{0}+\mathbf{b}=\mathbf{b}$. Эта разность единственна, так как если $\mathbf{c}$ – еще одна разность, то $\mathbf{c}=\mathbf{c}+\mathbf{0}=(\mathbf{c}+\mathbf{a})+(-\mathbf{a})=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$. ■

Замечание. Правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ позволяет построить и разность $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ как другую диагональ параллелограмма (рис. 4).

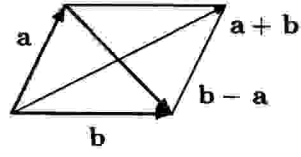


Рис. 4

Умножение вектора на число. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на вещественное число* α называется вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\mathbf{b}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$

и, в случае $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$,

2) $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\alpha > 0$, и $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$.

Обозначение: $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$. Очевидно, что векторы $\mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{a}$ коллинеарны и что $0\,\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Теорема 11.3. *Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами: для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и чисел* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

2) $(\alpha\beta)\,\mathbf{a} = \alpha(\beta\,\mathbf{a})$;

3) $(\alpha+\beta)\,\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{a}$ *(свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел);*

4) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b}$ *(свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения векторов).*

Доказательство. Свойство 1 очевидно. Свойства 2 и 3 проверяются перебором различных вариантов знаков и абсолютных величин чисел α и β. Свойство 4 вытекает из подобия треугольников (рис. 5). Здесь следует отдельно рассмотреть случай, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. ■

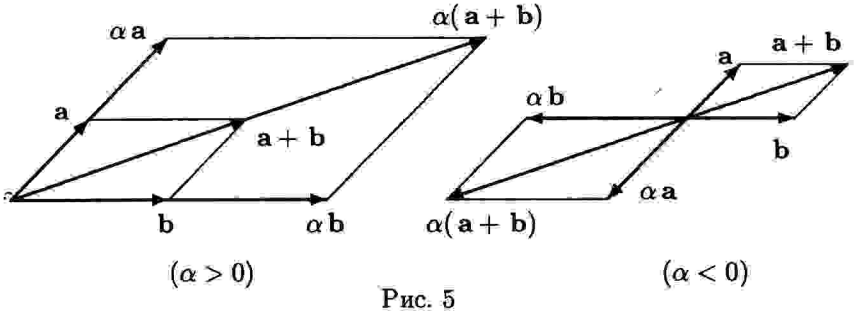


Рис. 5

§ 12. Векторы на прямой, на плоскости и в пространстве

До сих пор мы рассматривали свободные векторы в пространстве. Мы определили векторы и операции над ними, исходя из направленных отрезков, начала и концы которых – любые точки пространства. Свойства этих операций относились к произвольным векторам пространства.

Можно дать такое же определение вектора и операций над ними, оставаясь в пределах некоторой плоскости или даже прямой. При этом оказывается, что все утверждения, изложенные в § 10 и 11, останутся, по существу, неизменными, незначительное изменение коснет-

ся лишь их формулировок: в них добавится уточнение, какое именно множество векторов рассматривается.

В самом деле, пусть V_1, V_2 и V_3 – множества всех векторов на прямой, на плоскости и в пространстве соответственно. Как следует из определения суммы векторов, если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ (V_2 или V_3), то $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V_1$ (V_2 или V_3 соответственно), т.е. операция сложения векторов не выводит за пределы данной прямой (плоскости или пространства). Значит, операция сложения векторов является алгебраической операцией (или внутренним законом композиции) на каждом из множеств V_1, V_2 или V_3 (§9). Аналогично операция умножения вектора на действительное число является внешним законом композиции на каждом из указанных множеств. Если к этому добавить еще, что каждое из них содержит нулевой вектор $\mathbf{0}$ и противоположный вектор $-\mathbf{a}$ к любому своему вектору $\mathbf{a}$, то теоремы 11.1–11.3 можно отнести к каждому из множеств V_1, V_2, V_3. Сформулируем этот итог в виде следующего утверждения.

Утверждение. *Множество V_n, где $n = 1, 2, 3$, всех векторов на прямой (на плоскости или в пространстве) наделено внутренним законом композиции (называемым сложением) и внешним законом композиции (называемым умножением на число), которые обладают следующими свойствами: для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
3) $\exists \mathbf{0} \in V_n : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V_n$;
4) $\forall \mathbf{a} \in V_n \quad \exists (-\mathbf{a}) \in V_n : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;
5) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V_n$;
6) $(\alpha\beta)\,\mathbf{a} = \alpha(\beta\,\mathbf{a})$;
7) $(\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{a}$;
8) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b}$.

Отметим, что, прежде чем сделать этот вывод, мы проверили лишь факт наличия законов композиции и справедливость свойств 3 и 4. Очевидно, остальные свойства не нуждаются в проверке.

К свойствам 1–8 остается добавить, что операция сложения векторов на каждом из множеств V_1, V_2, V_3 обладает обратной операцией, называемой вычитанием.

Замечание. Свойства 1–8 говорят о том, что множества V_1, V_2, V_3, будучи, вообще говоря, различными, обладают общими свойствами. Такими же свойствами обладает и совсем непохожее на них множество $\mathbb{R}^{m \times n}$ матриц размера $m \times n$ (§2). Очевидно, это относится и к множеству $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, если операцию умножения чисел рассматривать как внешний закон композиции. Уже эти примеры наводят на мысль о целесообразности общего взгляда на эти множества. В следующей главе мы увидим, что рассмотренные в примерах множества – это лишь частные проявления того круга формальных понятий, который составляет основу линейной алгебры и аналитической геометрии.

Глава IV. Введение в теорию линейных пространств

§ 13. Вещественное линейное пространство

Определения. Мы будем рассматривать множества, наделенные двумя законами композиции: внутренним и внешним (§9). Внутренний закон композиции будем называть сложением, а внешний – умножением на вещественное число. Согласно этой терминологии на этих множествах указаны два правила:

• правило, посредством которого любой упорядоченной паре элементов a, b множества ставится в соответствие однозначно определенный элемент $a+b$ из этого же множества, называемый суммой элементов a и b;

• правило, посредством которого любому вещественному числу α и любому элементу a множества ставится в соответствие однозначно определенный элемент αa этого же множества, называемый произведением элемента a на число α.

Непустое множество V называется *вещественным линейным пространством* [1], если на нем заданы два закона композиции:

внутренний закон композиции, подчиненный аксиомам

1) $a+b=b+a$, $\forall a,b\in V$ (аксиома коммутативности),

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a,b,c\in V$ (аксиома ассоциативности),

3) $\exists\,\theta\in V: a+\theta=a$, $\forall a\in V$,

4) $\forall\, a\in V\ \ \exists\,(-a)\in V$: $a+(-a)=\theta$;

внешний закон композиции, подчиненный аксиомам

5) $1\cdot a=a$, $\forall a\in V$,

6) $(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall a\in V$;

и если оба закона связаны между собой аксиомами

7) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall a\in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел),

8) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$, $\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall a,b\in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения элементов V).

Линейное пространство называют также *векторным пространством.*

Отметим, что определение линейного пространства не содержит каких-либо конкретных описаний его элементов и операций над ними. Требуется только, чтобы эти операции были определены и подчинялись сформулированным выше восьми аксиомам, называемым *аксиомами линейного пространства.* Это означает,

[1] В гл. XII будут рассматриваться линейные пространства общего вида, когда в операции умножения на число участвуют не только вещественные числа. Забегая вперед, отметим, что все результаты данной главы будут справедливы и в общем случае.

что каждый раз, когда мы встречаемся с множествами, наделенными операциями, удовлетворяющими перечисленным аксиомам, мы вправе считать их линейными пространствами и переносить на них все результаты теории линейных пространств.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Использование этого термина не случайно, геометричность терминологии подчеркивает геометрический характер абстрактных алгебраических понятий, делает их "наглядными" и помогает уяснить, а зачастую и предвидеть не всегда очевидные факты.

Вектор θ называется *нулевым* вектором пространства, а вектор $(-a)$ – *противоположным вектору* a. Нулевой вектор обозначают также символом $\mathbf{0}$.

Разностью векторов b и a линейного пространства V называется вектор $x \in V$ такой, что $a + x = b$. Обозначение: $b - a$.

Примеры. 1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3. Как следует из §12, множества V_1, V_2, V_3 всех векторов на прямой, на плоскости и в пространстве являются вещественными линейными пространствами относительно введенных в них операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число. Эти пространства будем называть *геометрическими*.

Для изображения геометрических пространств V_1, V_2, V_3 условимся все векторы откладывать от одной фиксированной точки O на прямой (на плоскости и в пространстве соответственно). При таком соглашении каждый свободный вектор будет однозначно определен своим концом. В этом смысле мы будем, говоря о свободном векторе, указывать только его конец. Точку O будем (пока условно) называть началом координат (рис. 1).

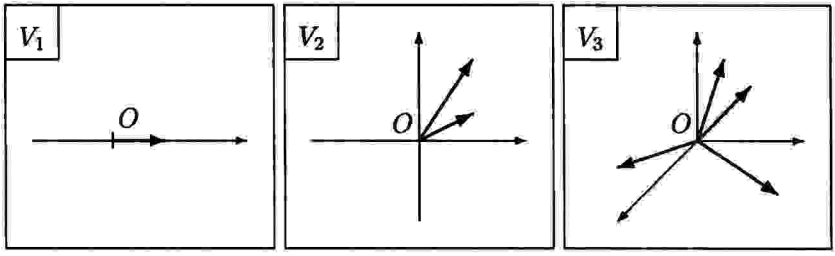


Рис. 1

2. Пространство вещественных матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$. Как следует из теорем 2.1 и 2.2, множество $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных матриц размера $m \times n$ является вещественным линейным пространством.

3. Арифметическое (координатное) пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbb{R}^n$ – множество всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел, называемых *арифметическими векторами* (или *n-мерными векторами*). Если арифметические векторы записывать в виде $a = (a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathbb{R}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\}$.

Два арифметических вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ называются *равными*, если $a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$.

Операции над арифметическими векторами вводятся следующим образом: $a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$, $\alpha a = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Нетрудно проверить, что $\mathbb{R}^n$ – вещественное линейное пространство относительно введенных операций.

Замечание 1. Отметим, что $\mathbb{R}^n$ – декартова n-я степень множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Замечание 2. Иногда из соображений удобства мы будем записывать арифметические векторы в виде столбцов.

Замечание 3. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ совпадает с пространством матриц $\mathbb{R}^{1\times n}$ или $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

4. Пространства многочленов. *Многочленом n-й степени* от одной переменной t с вещественными коэффициентами называется выражение вида $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, причем $a_n \neq 0$. Число $0 \in \mathbb{R}$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется *нулевым многочленом*. Степень нулевого многочлена не определена.

Два многочлена $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ и $g(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$ называются *равными*, если $n = m$ и $a_k = b_k$, $k = \overline{0,n}$.

Суммой многочленов $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ и $g(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$ называется многочлен $h(t) = \sum_{k\geq 0}(a_k + b_k)t^k$, где недостающие коэффициенты (a_k или b_k) заменяются нулями. Обозначение: $f(t) + g(t)$.

Произведением многочлена $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ называется многочлен $\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k t^k$.

Нетрудно проверить, что множества M_n всех многочленов степени не выше n и множество M_∞ многочленов всех степеней, пополненные нулевым многочленом, образуют вещественные линейные пространства.

Простейшие свойства линейных пространств. Следующие свойства линейных пространств являются элементарными следствиями из аксиом.

1°. *В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор*, так как если θ_1 и θ_2 – два нулевых вектора, то из аксиомы 3 следует, что $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$.

Замечание 4. Говоря о единственности нулевого вектора, мы не различаем равные векторы. В этом же смысле следует понимать и другие утверждения о единственности.

2°. *Для любого вектора линейного пространства существует единственный противоположный вектор*, так как если b и c – два противоположных вектора к вектору a, то, последовательно применяя аксиомы 3, 4, 2, получим, что $b = b + (a + c) = (b + a) + c = c$.

3°. *В линейном пространстве справедливы равенства*: $0a = \theta$, $\forall a \in V$ *и* $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для доказательства первого равенства достаточно проверить, что $b + 0a = b$, $\forall b \in V$. Это соотношение вытекает из следующей цепочки равенств, основанных на аксиомах 2–7:

$$b + 0a = (b + \theta) + 0a = b + ((-a) + a) + 0a = (b + (-a)) + a + 0a =$$
$$= (b + (-a)) + 1a + 0a = (b + (-a)) + (1 + 0)a = (b + (-a)) + a =$$
$$= b + ((-a) + a) = b + \theta = b.$$

Второе равенство доказывается с помощью первого и аксиомы 6: если a – произвольный вектор пространства, то $\alpha\theta = \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a = \theta$. ■

4°. *В линейном пространстве из равенства* $\alpha a = \theta$ *следует, что либо* $\alpha = 0$, *либо* $a = \theta$.

В самом деле, как следует из свойства 3°, случай $\alpha = 0$ возможен, если $\alpha a = \theta$. В случае когда $\alpha \neq 0$, на основании свойства 3° и аксиом 5, 6 получим

$$a = 1a = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)a = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) = \frac{1}{\alpha}\theta = \theta.$$

5°. *В линейном пространстве для любого вектора* a *противоположный вектор может быть получен как произведение:*

$$-a = (-1)a.$$

Это утверждение вытекает из аксиом 3–5, 7 и свойства 3°, так как

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1-1)a = 0a = \theta.$$

6°. *Для любой пары векторов* a *и* b *линейного пространства существует, и притом единственная, разность* $b - a$.

Доказательство. Вектор $b+(-a)$ является разностью $b-a$ векторов a и b, так как на основании аксиом 1–4 и определения разности имеем

$$a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = \theta + b = b.$$

При этом если c – любая другая разность $b - a$, то из аксиом 2–4 следует, что $c = c + \theta = c + (a + (-a)) = (c + a) + (-a) = b + (-a)$. ■

§ 14. Линейная зависимость

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – векторы линейного пространства V и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – действительные числа. Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$ называется *линейной комбинацией векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Если вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то говорят, что *вектор* b *линейно выражается через векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, при этом представление вектора b в виде $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$ называют *разложением вектора* b *по векторам* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Очевидно, нулевой вектор линейно выражается через любой вектор, так как $\theta = 0a$, $\forall a \in V$. Через нулевой вектор не может выражаться ни один ненулевой вектор, так как $\alpha\theta = \theta$, $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной*, если среди ее коэффициентов хотя бы один отличен от нуля. Очевидно, тривиальная комбинация любой системы векторов равна нулевому вектору.

Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, одновременно не равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta, \tag{14.1}$$

и *линейно независимой*, если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов, т.е. если из равенства (14.1) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Теорема 14.1. *Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Доказательство. Линейная зависимость системы из одного вектора a равносильна тому, что $\alpha a = \theta$ при некотором $\alpha \neq 0$, а это, в свою очередь, равносильно (§13, свойства 3, 4) тому, что $a = \theta$. ■

Теорема 14.2. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $k > 1$, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через другие.*

Доказательство. Необходимость. Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима, то существуют числа α_1, α_2, $\ldots$, α_k, одновременно не равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_i a_i + \ldots + \alpha_k a_k = \theta. \qquad (14.2)$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$. Тогда в силу (14.2) $a_i = \sum_{s \neq i} (-\alpha_s/\alpha_i)\, a_s$. Так как $k > 1$, то для вектора a_i существует хотя бы один "другой" вектор системы.

Достаточность. Пусть $a_i = \sum_{s \neq i} \alpha_s a_s$. Тогда, перенеся правую часть этого равенства в левую, получим нетривиальную линейную комбинацию векторов системы, равную нулевому вектору:

$$-\alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1} + 1 a_i - \alpha_{i+1} a_{i+1} - \ldots - \alpha_k a_k = \theta. \blacksquare$$

Эта теорема дает другое определение линейной зависимости системы векторов, в которой содержится более одного вектора.

Теорема 14.3. *Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать подсистемой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ ее первые s векторов. Из линейной зависимости $a_1, a_2, \ldots, a_s$ следует, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = \theta$ для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, среди которых существует $\alpha_i \neq 0$. Тогда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s + 0 a_{s+1} + \ldots + 0 a_k = \theta$, причем $\alpha_i \neq 0$. Следовательно, система векторов a_1, a_2, $\ldots$, a_s, $\ldots$, a_k линейно зависима. ■

Теорема 14.4. *Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.*

В самом деле, если бы существовала линейно зависимая подсистема, то на основании теоремы 14.3 вся система была бы линейно зависимой. ■

Теорема 14.5. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима тогда и только тогда, когда любой вектор, являющийся линейной комбинацией этих векторов, имеет единственное разложение по этим векторам.*

Доказательство. Необходимость доказывается от противного. Пусть существует вектор b, который имеет два различных разложения по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_k$: $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$, $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i' a_i$,

$\exists \alpha_s \neq \alpha'_s$. Вычитая почленно одно равенство из другого, получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, равную нулевому вектору. Отсюда следует линейная зависимость системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Достаточность также доказывается от противного. Пусть система $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима, тогда

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta \tag{14.3}$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых существует $\alpha_s \neq 0$. Но, с другой стороны,

$$0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_k = \theta. \tag{14.4}$$

Мы получили два различных разложения (14.3) и (14.4) нулевого вектора θ по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что невозможно. ■

Теорема 14.6. *Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима, а система $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$.*

Доказательство. Из линейной зависимости системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ следует, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \alpha_0 b = \theta \tag{14.5}$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_0$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля. Если $\alpha_0 = 0$, то ненулевой коэффициент α_s находится среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; при этом (14.5) переходит в равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$, где $\alpha_s \neq 0$, $1 \leq s \leq k$, которое противоречит условию линейной независимости $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Следовательно, $\alpha_0 \neq 0$; отсюда и из (14.5) получаем, что $b = \sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i/\alpha_0)\, a_i$. ■

Примеры. 1. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{14.6}$$

линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представляет собой арифметический вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, который равен нулевому вектору $\theta = (0, \ldots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

2. Пространство многочленов. Многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих многочленов с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ представляет собой многочлен $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$, который равен нулевому многочлену тогда и только тогда, когда $\alpha_k = 0$, $k = \overline{0, n}$.

§ 15. Геометрический смысл линейной зависимости

Будем рассматривать геометрические векторы на прямой, на плоскости и в пространстве. Выясним, что означает линейная зависимость геометрических векторов. Предварительно докажем два чисто геометрических утверждения.

Утверждение 1. *На прямой (на плоскости и в пространстве) существует ненулевой вектор (соответственно два неколлинеарных и три некомпланарных вектора).*

Доказательство. В случае прямой достаточно взять две несовпадающие точки O и A (рис. 1,*а*), тогда вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$. На плоскости достаточно взять три точки O, A и B, не лежащие на одной прямой (рис. 1,*б*), тогда векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. В пространстве достаточно взять четыре точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости (рис. 1,*в*), тогда векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ некомпланарны. ■

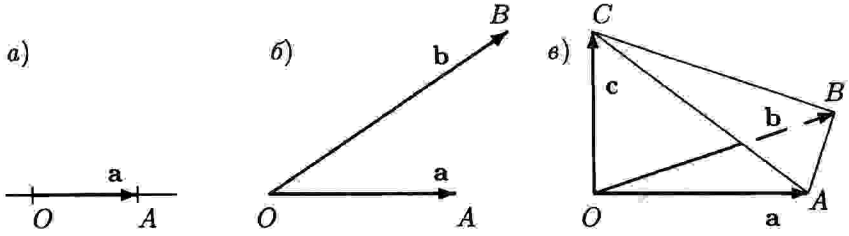


Рис. 1

Утверждение 2. *На прямой (на плоскости и в пространстве) всякий вектор линейно выражается через любой ненулевой вектор (соответственно любые два неколлинеарных и любые три некомпланарных вектора).*

Доказательство. 1. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – векторы на прямой и $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Отложим их от одной точки O прямой. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ (рис. 2,*а*). Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{b} = 0\mathbf{a}$. Если же $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то, взяв

$$\alpha = \begin{cases} |\overrightarrow{OB}|/|\overrightarrow{OA}|, & \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}, \\ -|\overrightarrow{OB}|/|\overrightarrow{OA}|, & \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}, \end{cases}$$

согласно определению произведения вектора на число получим, что $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$.

2. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – векторы плоскости и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ неколлинеарны (значит, ни один из них не равен $\mathbf{0}$). Отложим эти векторы от одной точки O плоскости. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 2,*б*). Если $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{c} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{b}$. Если же $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, то проведем из точки C прямые, параллельные прямым OB и OA, до пересечения с прямыми OA и

OB соответственно. Пусть A_1, B_1 – точки пересечения этих прямых (существование точек пересечения следует из неколлинеарности $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$). Тогда $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$. Отсюда и из первой части утверждения получим, что $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

3. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ – векторы пространства и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны (значит, попарно неколлинеарны и, тем более, ни один из них не равен $\mathbf{0}$). Отложим эти векторы от одной точки O. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ (рис. 2,*в*). Так как векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ попарно неколлинеарны, то получим три плоскости OBC, OAC и OAB. Если $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{d} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$. Если же $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, то проведем из точки D плоскости, параллельные плоскостям OBC, OAC и OAB, до пересечения с прямыми OA, OB и OC соответственно. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки пересечения (существование точек пересечения следует из некомпланарности $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$). Тогда $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$. Отсюда и из первой части утверждения получим, что $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. ■

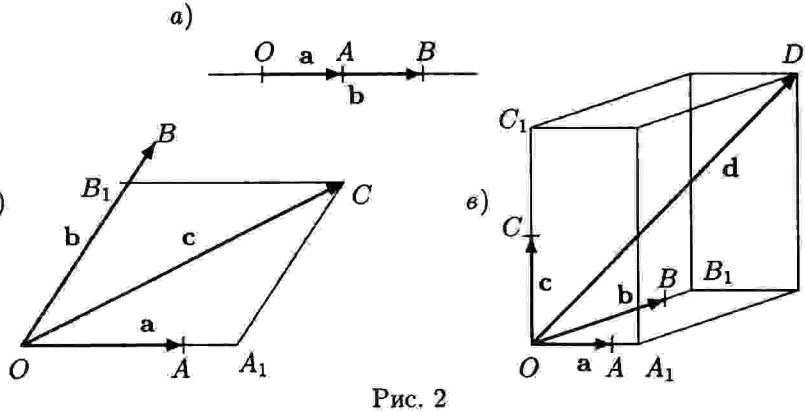


Рис. 2

Теорема 15.1. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ линейно зависимы, тогда в силу теоремы 14.2 один из них линейно выражается через другой. Пусть $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$. Отсюда и из определения произведения вектора на число следует коллинеарность $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т.е. параллельны одной прямой. Будем считать, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ (так как если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то линейная зависимость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ следует из теорем 14.1 и 14.3). Отложим $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ от одной точки. Тогда они окажутся на одной прямой, при этом, согласно утверждению 2, $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$. В силу теоремы 14.2 отсюда следует линейная зависимость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. ■

Следствие 1. *Любые два (значит, и более) вектора прямой линейно зависимы.*

Теорема 15.2. *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно зависимы, тогда один из них линейно выражается через другие. Пусть $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ коллинеарны и тем более компланарны. Если же $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны, то отложим векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ от одной точки (рис. 2,*б*). Тогда вектор $\mathbf{c}$, являясь диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha\mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{b}$, окажется в той же плоскости, что и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Значит, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, т.е. параллельны одной плоскости. Будем считать, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ неколлинеарны (так как если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ коллинеарны, то линейная зависимость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ следует из линейной зависимости подсистемы). Отложим $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от одной точки. Тогда они окажутся в одной плоскости и на основании утверждения 2 имеем $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. В силу теоремы 14.2 отсюда следует, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно зависимы. ■

Следствие 2. *Любые три (значит, и более) вектора плоскости линейно зависимы.*

Теорема 15.3. *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Доказательство. Будем считать, что в четверке векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны (так как если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, то линейная зависимость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ вытекает из линейной зависимости подсистемы). Тогда на основании утверждения 2 имеем $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. В силу теоремы 14.2 отсюда следует, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ линейно зависимы. ■

Итак, понятие линейной зависимости является обобщением понятий коллинеарности и компланарности геометрических векторов.

Трудно не заметить логическое "однообразие" формулировок и доказательств изложенных выше теорем. Мы не старались уходить от повторений, чтобы подчеркнуть, как похожи по своей структуре три различных линейных пространства V_1, V_2 и V_3 – векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. Резюмируем полученные результаты. Итак, для $n = 1, 2, 3$ в линейном пространстве V_n

1) существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из большего числа векторов линейно зависима;

2) существует линейно независимая система из n векторов, а любой вектор пространства V_n линейно выражается через них;

3) максимальное число линейно независимых векторов равно n.

Мы выделили общие свойства, характерные для различных линейных пространств V_1, V_2 и V_3. Возникает естественный вопрос, не являются ли они общими для всех линейных пространств. Прежде чем ответить на этот вопрос, обратимся вновь к матрицам.

§ 16. Ранг матрицы

Понятие линейной зависимости векторов тесно связано с понятием матрицы. Если рассматривать строки и столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ как векторы арифметических пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, то оказывается, что одна из важнейших характеристик матрицы определяется свойством линейной зависимости ее строк и столбцов. В свою очередь, эта характеристика будет удобным аппаратом дальнейшего исследования линейных пространств.

Ранг матрицы и линейная зависимость. *Рангом* ненулевой *матрицы* называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю. Обозначение: $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rang} A, r_A$ и др.

Из определения вытекают следующие факты:

1) ранг матрицы не превосходит ее размеров: если $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то

$$\operatorname{rg} A \le \min(m, n); \tag{16.1}$$

2) равенство $\operatorname{rg} A = r > 0$ равносильно выполнению двух условий:
   а) в матрице A существует ненулевой минор r-го порядка,
   б) любой минор более высокого порядка равен нулю.

Пусть $\operatorname{rg} A = r > 0$. Любой ненулевой минор r-го порядка этой матрицы называется *базисным минором*, а строки и столбцы, в которых расположен базисный минор, – *базисными строками* и *столбцами*.

Разумеется, у матрицы может существовать не один базисный минор, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу этой матрицы.

Теорема 16.1 (о базисном миноре). *Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).*

Доказательство. Докажем столбцовый вариант теоремы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\operatorname{rg} A = r > 0$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор M_r находится в левом верхнем углу. Тогда базисными столбцами будут первые r столбцов: $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Линейная независимость базисных столбцов доказывается от противного. В самом деле, пусть это не так. Тогда на основании теоремы 14.2 один из базисных столбцов является линейной комбинацией других базисных столбцов. Но тогда и в миноре M_r один из столбцов будет линейной комбинацией других столбцов и $M_r = 0$. Это противоречит тому, что M_r – базисный минор.

Пусть теперь a_k – произвольный столбец матрицы A. Покажем, что он является линейной комбинацией столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Будем считать, что $k > r$ (в случае $k \le r$ утверждение очевидно, так как $a_k = 0a_1 + \ldots + 0a_{k-1} + a_k + 0a_{k+1} + \ldots + 0a_r$). Найдем числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ такие, что $a_k = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s a_s$ или, в поэлементной записи,

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s a_{is}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{16.2}$$

Для этого составим вспомогательную матрицу

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ik} \end{bmatrix},$$

полученную окаймлением минора M_r i-й строкой и k-м столбцом матрицы A. Очевидно, $|\Delta_i| = 0$, $i = \overline{1,m}$, так как в случае, когда $i \le r$, матрица Δ_i содержит две одинаковые строки, а в случае, когда $i > r$, $|\Delta_i|$ является минором $(r+1)$-го порядка матрицы A ранга r. Разложив $|\Delta_i|$ по последней строке, получим $0 = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{ik}M_r$, где $A_1, A_2, \ldots, A_r$, являясь алгебраическими дополнениями к элементам вычеркиваемой строки, не зависят от i. Отсюда, полагая $\alpha_s = -A_s/M_r$, $s = \overline{1,r}$, приходим к (16.2). ■

Следствие 1 (необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя). Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо ее строка (столбец) является линейной комбинацией других ее строк (столбцов).

Доказательство. Достаточность доказана в §4 (свойство 8). Необходимость вытекает из теоремы о базисном миноре, так как из равенства $|A| = 0$ следует, что $\operatorname{rg} A < n$ и, значит, в матрице A имеется хотя бы одна небазисная строка (столбец), которая является линейной комбинацией других (т.е. базисных) строк (столбцов). ■

Пусть в линейном пространстве даны две системы векторов. Если каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой, то говорят, что *первая система линейно выражается через вторую*. Очевидно, что "линейная выражаемость" обладает свойством транзитивности, т.е. если система векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_n$, а система векторов $b_1, \ldots, b_n$ – через $c_1, \ldots, c_m$, то $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $c_1, \ldots, c_m$.

Теорема 16.2. *Если в линейном пространстве бо́льшая система векторов линейно выражается через меньшую, то большая система линейно зависима*[1].

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$ – две системы векторов в линейном пространстве, $m > n$ и $a_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_j$, $i = \overline{1,m}$. Тогда в матрице

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

число строк больше числа столбцов. Из (16.1) и условия теоремы следует, что $\operatorname{rg} C \le n < m$. Значит, в матрице C существует хотя бы одна небазисная строка (например, i-я), которая линейно выражается через другие строки. Тогда из свойств операций в пространстве $\mathbb{R}^n$ следует, что вектор a_i линейно выражается через другие векторы системы $a_1, \ldots, a_m$. Отсюда и из теоремы 14.2 следует линейная зависимость системы векторов $a_1, \ldots, a_m$. ■

Теорема 16.3. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).*

[1] Теорема представляет собой другую формулировку теоремы, известной как "основная теорема о линейной зависимости" [14].

Доказательство. Пусть $\operatorname{rg} A = r$ и $r > 0$ (случай $r = 0$ очевиден). Тогда в матрице A существуют r линейно независимых строк (столбцов) – это ее базисные строки (столбцы). При этом любая система из большего числа строк (столбцов) линейно зависима на основании теорем 16.1, 14.2. ■

Следствие 2. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$.

Замечание 1. Теорема 16.3 дает два новых определения ранга матрицы.

Теорема 16.4. *Если все строки (столбцы) матрицы A линейно выражаются через строки (столбцы) матрицы B, то*

$$\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} B.$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{rg} A = r$, $\operatorname{rg} B = s$ и пусть $a_1, \ldots, a_r$ и $b_1, \ldots, b_s$ – базисные столбцы матриц A и B. Докажем, что $r \le s$. Пусть $r > s$, тогда согласно условию теоремы система $a_1, \ldots, a_r$ линейно выражается через систему столбцов матрицы B, которая, в свою очередь, в силу теоремы 16.1 линейно выражается через систему базисных столбцов $b_1, \ldots, b_s$. Отсюда следует, что $a_1, \ldots, a_r$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_s$, причем $r > s$. Из теоремы 16.2 вытекает линейная зависимость $a_1, \ldots, a_r$. Это противоречит тому, что $a_1, \ldots, a_r$ – базисные столбцы. ■

Теорема 16.5. *Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей.*

Доказательство. Пусть $C = AB$. Из (2.3) и (2.2) следует, что строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы B, а столбцы C – через столбцы матрицы A. Отсюда в силу теоремы 16.4 вытекает, что $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A$. ■

Ранг матрицы и элементарные преобразования.

Теорема 16.6. *Ранг матрицы не изменяется при умножении ее на невырожденную матрицу.*

Доказательство. Пусть $C = AP$, $|P| \ne 0$. Тогда на основании теоремы 16.5 имеем $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A$. С другой стороны, матрица P обратима (теорема 5.2) и $A = CP^{-1}$. Снова воспользовавшись теоремой 16.5, получим, что $\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} C$. Оба этих неравенства говорят о том, что $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} A$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{rg} QA = \operatorname{rg} A$, если $|Q| \ne 0$. ■

Теорема 16.7. *Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 3.2 и невырожденности матриц (3.1) элементарных преобразований ($|P_{ij}| = -1$, $|D_i| = \alpha \ne 0$, $|L_{ij}| = 1$). ■

Теорема 16.8. *Ранг матрицы не изменится, если из системы ее строк (столбцов) вычеркнуть или приписать строку (соответственно столбец), которая является линейной комбинацией других строк (соответственно столбцов).*

Доказательство. Рассмотрим вариант теоремы, относящийся к вычеркиванию строки. Прежде чем вычеркивать строку, являющуюся линейной комбинацией других строк, вычтем из нее эту линейную комбинацию. Тогда вычеркиваемая строка станет нулевой, а ранг матрицы согласно теореме 16.7 не изменится. Затем вычеркнем нулевую строку. При этом ранг матрицы останется прежним, так как нулевая строка не влияет на порядок ее ненулевых миноров. Аналогично доказываются другие варианты теоремы. ■

Метод Гаусса вычисления ранга. Теоретическую основу этого метода для решения данной задачи (см. §4) составляют следующие факты:

– ранг верхней (нижней) трапециевидной матрицы равен количеству ненулевых строк (соответственно столбцов);

– элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга (теорема 16.7);

– любая матрица элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к трапециевидной форме (теорема 3.1).

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы состоит в приведении этой матрицы элементарными преобразованиями к верхней (нижней) трапециевидной форме и подсчете ее ненулевых строк (столбцов).

Отметим, что этот метод почти копирует метод Гаусса вычисления определителя, отличие лишь в том, что в данной задаче он реализуется несколько проще, так как никакое элементарное преобразование *не изменяет* ранга матрицы.

Замечание 2. Среди других методов вычисления ранга выделим *метод окаймления миноров*. Минор M_{k+1} $(k+1)$-го порядка называется окаймляющим минор M_k k-го порядка, если M_k получается из M_{k+1} вычеркиванием одной строки и одного столбца. Метод окаймления миноров основан на следующем утверждении (докажите!): *если в матрице A существует ненулевой минор M_r r-го порядка, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то* $\operatorname{rg} A = r$. Метод окаймления миноров состоит в поиске такого минора M_r путем перебора. Безусловно, он уступает методу Гаусса из-за большого объема требуемых вычислений, однако в некоторых случаях бывает полезным. Во всяком случае идея окаймления матрицы лежит в основе многих методов вычислительной алгебры.

Эквивалентные матрицы. Две матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называются *эквивалентными*, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$. Обозначение: $A \sim B$.

Теорема 16.9. *Эквивалентность матриц является отношением эквивалентности на множестве матриц* $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Доказательство. В самом деле, рефлексивность отношения следует из того, что $A = I_{m\times m}AI_{n\times n}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$; симметричность – из того, что если $A = PBQ$, то $B = P^{-1}AQ^{-1}$; транзитивность – из того, что если $A = P_1BQ_1$, $B = P_2CQ_2$, то $A = P_1P_2CQ_2Q_1 = PCQ$, где $P = P_1P_2$, $Q = Q_2Q_1$. ■

Теорема 16.10. *Любая ненулевая матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ранга r эквивалентна матрице $I_r \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & O \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline & O & & & O \\ & & & & \end{array}\right]$$

(*здесь все элементы, кроме первых* r *диагональных элементов, равных* 1, *равны* 0).

Доказательство. Покажем, что матрица A элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к виду I_r. В самом деле, строчный вариант *основного процесса* (§3) приводит ее к верхней ступенчатой форме. Если к получившейся матрице применить столбцовый вариант основного процесса, то придем к диагональной матрице. Так как элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга, то ровно r первых диагональных элементов этой матрицы отличны от нуля. Разделив каждую из первых r строк на диагональный элемент, получим матрицу I_r. На языке матриц элементарных преобразований это означает, что существуют матрицы элементарных преобразований $Q_1, \dots, Q_k$ и $P_1, \dots, P_s$ такие, что $I_r = Q_k \dots Q_1 A P_1 \dots P_s$ (теорема 3.2). Положив $Q = Q_k \dots Q_1$ и $P = P_1 \dots P_s$, получим, что $I_r = QAP$, где $|Q| \neq 0$, $|P| \neq 0$ в силу невырожденности матриц элементарных преобразований. ■

Теорема 16.11. *Две матрицы* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

Доказательство. Необходимость вытекает из определения и теоремы 16.6. Достаточность следует из теоремы 16.10 и транзитивности отношения эквивалентности. ■

Скелетное разложение матрицы. Теореме о базисном миноре можно дать чисто матричную формулировку.

Теорема 16.12. *Любая матрица* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *ранга* r *может быть представлена в виде*

$$A = BC, \tag{16.3}$$

где $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$.

Доказательство. Для получения разложения (16.3) достаточно взять в качестве столбцов матрицы B базисные столбцы матрицы A. Так как любой столбец матрицы A является линейной комбинацией столбцов матрицы B

$$a_j = c_{1j} b_1 + \dots + c_{rj} b_r, \quad j = \overline{1,n},$$

то коэффициенты $c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{rj}$ образуют j-й столбец матрицы C ($j = \overline{1,n}$, см. (2.2), (2.3)). ■

Представление (16.3) называется *скелетным разложением матрицы* A.

Отметим, что в скелетном разложении

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} C = r,$$

так как $\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} C$.

Скелетное разложение можно трактовать и в строчном варианте: строки матрицы C – это базисные строки матрицы A, через которые линейно выражаются все строки матрицы A. Тогда коэфициенты этих линейных комбинаций образуют строки матрицы B.

Интересен и матричный вариант скелетного разложения: если $b_1, \dots, b_r$ – базисные столбцы, а $c'_1, \dots, c'_r$ – базисные строки матрицы A, то

$$A = \sum_{i=1}^{r} b_i c'_i, \tag{16.4}$$

т. е. матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ может быть представлена как сумма r матриц размера $m \times n$, являющихся произведением столбца на строку. Это доказывается следующим образом. Если $B_i \in \mathbb{R}^{m\times r}$ – матрица, у которой i-й столбец совпадает с i-м столбцом матрицы B, а все остальные столбцы нулевые, $C_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$ – матрица, у которой i-я строка совпадает с i-й строкой матрицы C, а все остальные строки нулевые, то

$$B = B_1 + \ldots + B_r, \quad C = C_1 + \ldots + C_r, \quad B_i C_i = b_i c'_i, \quad B_i C_j = 0 \quad (i \ne j)$$

и

$$A = (B_1 + \ldots + B_r)(C_1 + \ldots + C_r) = \sum_{i=1}^{r} B_i C_i = \sum_{i=1}^{r} b_i c'_i.$$

§ 17. Базис и размерность

Определения. *Базисом линейного пространства* называется упорядоченная линейно независимая система векторов пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства. Согласно этому определению система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пространства V образует базис V, если

- $e_1, \dots, e_n$ линейно независима;
- для любого вектора $x \in V$ существуют числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Как показано в §15, любой ненулевой вектор является базисом линейного пространства V_1 векторов на прямой, любая пара неколлинеарных векторов – базисом пространства V_2 векторов плоскости, любая тройка некомпланарных векторов – базисом пространства V_3.

Теорема 17.1. *Система векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства является его базисом тогда и только тогда, когда она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пространства.*

Доказательство. Необходимость. Базис пространства является максимальной линейно независимой системой векторов в этом пространстве, так как любая бóльшая система векторов линейно выражается через этот базис (т.е. через меньшую систему) и на основании теоремы 16.2 линейно зависима.

Достаточность. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – максимальная линейно независимая система векторов пространства V, тогда для любого вектора $x \in V$ система векторов $e_1, \ldots, e_n, x$ линейно зависима, так как содержит более чем n векторов. Из теоремы 14.6 следует, что вектор x является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_n$. Следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис пространства V. ■

Теорема 17.1 дает другое определение базиса.

Итак, все базисы одного линейного пространства состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов этого пространства. Это означает, что число векторов базиса является характеристикой не столько базиса, сколько самого пространства. Число векторов базиса называется *размерностью* линейного пространства. Размерность нулевого пространства по определению считается равной нулю. Обозначение: $\dim V$. Из теоремы 17.1 следует, что размерность линейного пространства равна максимальному числу линейно независимых векторов этого пространства. Линейное пространство размерности n, где n – целое неотрицательное число, называется n-мерным пространством. Любое n-мерное пространство называется *конечномерным линейным пространством.*

Конечномерными пространствами не исчерпываются все линейные пространства: не во всяком пространстве можно указать максимальное число линейно независимых векторов. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ в нем найдется линейно независимая система из k векторов. Из определения размерности и теоремы 17.1 вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. *В n-мерном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис.*

Утверждение 2. *В n-мерном пространстве любая система из s векторов, где $s > n$, линейно зависима.*

Примеры. 1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3. Из результатов §15 следует, что $\dim V_n = n$, где $n = 1, 2, 3$.

2. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы (14.6) образуют базис, так как они линейно независимы и, как нетрудно проверить, любой вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ линейно выражается через них: $a = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$. Итак, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

3. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$. Рассмотрим матрицы E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{mn}, у которых все элементы равны нулю, кроме одного: в матрице E_{ij} элемент в позиции (i,j) равен единице.

а) Эти матрицы линейно независимы, так как из того, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = O,$$

следует, что $a_{ij}=0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

б) Любая матрица $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ является линейной комбинацией этих матриц (как видно из п."а"). Следовательно, эти матрицы образуют базис $\mathbb{R}^{m\times n}$ и $\dim\mathbb{R}^{m\times n}=mn$.

4. Пространство многочленов M_n. Многочлены $1, t, t^2$, ..., t^n образуют базис M_n, так как они линейно независимы (§14), а любой многочлен $p(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n\in M_n$ является линейной комбинацией этих многочленов с коэффициентами $a_0,a_1,\ldots,a_n$. Итак, $\dim M_n=n+1$.

5. Пространство M_∞ многочленов всех степеней (§13, пример 4) бесконечномерно, так как для любого $k\in\mathbb{N}$ можно указать k линейно независимых многочленов: $1,t,t^2,\ldots,t^{k-1}$.

Координаты вектора. Базис играет большую роль в изучении линейного пространства. С его помощью абстрактные векторы можно задавать в виде совокупности чисел, а операции над векторами сводить к операциям над числами.

Теорема 17.2. *Разложение вектора по базису единственно.*

Это утверждение вытекает из теоремы 14.5. ■

Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами вектора в этом базисе*. Из определения базиса и теоремы 17.2 следует, что каждый вектор имеет координаты, при этом два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

Обозначение. Если $e_1,\ldots,e_n$ – базис пространства и

$$x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n, \tag{17.1}$$

то будем обозначать через x_e вектор-столбец из координат вектора x в этом базисе:

$$x_e=\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T. \tag{17.2}$$

Столбец x_e называют *координатным столбцом* вектора x в базисе $e_1,\ldots,e_n$. Положим

$$e=(e_1,e_2,\ldots,e_n). \tag{17.3}$$

Символ e будем понимать как обозначение базиса $e_1,\ldots,e_n$ и как матрицу-строку $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. В обозначениях (17.2) и (17.3) разложение (17.1) может быть записано как произведение строки e на столбец x_e:

$$x=ex_e. \tag{17.4}$$

Теорема 17.3. *При сложении векторов их координаты в одном базисе складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Тогда из аксиом линейного пространства следует, что $x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i$ и $\alpha x = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i e_i$. Следовательно, $(x+y)_e = x_e + y_e$ и $(\alpha x)_e = \alpha x_e$. ■

Переход к другому базису. Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – два базиса n-мерного пространства V. Выясним, как меняются координаты вектора при переходе от базиса e к базису f.

Векторы второго базиса, как векторы пространства V, разлагаются по базису e; пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11} e_1 + c_{21} e_2 + \ldots + c_{n1} e_n, \\ f_2 &= c_{12} e_1 + c_{22} e_2 + \ldots + c_{n2} e_n, \\ &\ldots \\ f_n &= c_{1n} e_1 + c_{2n} e_2 + \ldots + c_{nn} e_n. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу

$$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{17.6}$$

которая называется *матрицей перехода от базиса e к базису f*.

Обозначение: C или $C_{e \to f}$.

Замечание. Соотношения (17.5) в обозначениях (17.3) и (17.6) могут быть записаны компактно в виде

$$f = eC. \tag{17.7}$$

Теорема 17.4. *Матрица перехода к другому базису не вырождена.*

Доказательство. Пусть $|C| = 0$. Тогда (теорема 16.1, следствие) один из столбцов матрицы C является линейной комбинацией других ее столбцов. В силу свойства линейности координат отсюда следует, что один из векторов $f_1, \ldots, f_n$ линейно выражается через другие векторы этой системы. Это противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_n$. ■

Теорема 17.5. *Если C – матрица перехода от базиса e к базису f, то C^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису e.*

Доказательство. Пусть $f = eC$. Умножив обе части этого равенства на C^{-1}, получим, что $e = fC^{-1}$, откуда в силу (17.7) следует, что C^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису e. ■

Теорема 17.6. *Координаты вектора x в базисах e и f связаны между собой соотношением*

$$x_e = C x_f, \tag{17.8}$$

где C – матрица перехода от базиса e к базису f.

Доказательство. Из (17.4) и (17.7) имеем, что $x = e x_e$ и $x = f x_f = (eC) x_f = e(C x_f)$. Отсюда в силу единственности разложения по базису получаем (17.8). ■

§ 18. Линейное подпространство и линейное многообразие

Линейное подпространство. Непустое подмножество L пространства V называется *линейным подпространством пространства* V, если оно само является линейным пространством относительно законов композиции, действующих в V.

Теорема 18.1. *Непустое подмножество L пространства V является линейным подпространством этого пространства тогда и только тогда, когда имеют место импликации:*

$$\begin{array}{lcl} a, b \in L & \Rightarrow & a + b \in L; \\ a \in L, \alpha \in \mathbb{R} & \Rightarrow & \alpha a \in L. \end{array} \tag{18.1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как если L – линейное пространство, то результаты выполнения операций над элементами из L находятся в L.

Достаточность. Соотношения (18.1) говорят о том, что операции сложения и умножения на число являются законами композиции в L. Остается проверить, что они подчиняются всем аксиомам линейного пространства. В действительности же необходимо проверить только аксиомы нуля и противоположного элемента, так как выполнение остальных аксиом очевидно. Возьмем произвольный элемент $a \in L$, тогда $0a = \theta$ и $(-1)a = -a$. Из (18.1) следует, что $\theta \in L$ и $-a \in L$. Итак, L – линейное подпространство пространства V. ■

Свойства (18.1) называют свойствами *замкнутости множества L относительно* указанных *операций*.

Примеры. 1. Каждое линейное пространство обладает двумя подпространствами: нулевым подпространством (состоящим из одного нулевого вектора) и самим пространством. Эти подпространства называются *тривиальными*.

2. Геометрическое пространство V_1 векторов на прямой имеет два тривиальных подпространства. Геометрическое пространство V_2 векторов на плоскости, кроме тривиальных подпространств, имеет бесконечно много нетривиальных: каждое из них является пространством всех векторов, концы которых лежат на прямой, проходящей через начало координат (или если отойти от соглашения об откладывании всех векторов от начала координат, то пространством всех векторов, параллельных некоторой прямой). В геометрическом пространстве V_3 векторов пространства каждая прямая и каждая плоскость, проходящие через начало координат, определяют линейное подпространство.

3. В пространстве многочленов M_n каждое пространство M_k, где $0 \leq k \leq n$, образует линейное подпространство.

Линейное аффинное многообразие. Примеры линейных подпространств в геометрических пространствах дают геометрический образ подпространства как прямой или плоскости, проходящей через

начало координат. Возникает естественный вопрос, что же будет аналогом других прямых и плоскостей в произвольном линейном пространстве. Ответим на этот вопрос.

Пусть V – линейное пространство, L – некоторое его подпространство, x_0 – некоторый вектор пространства V. Множество H всевозможных векторов вида $x_0 + x$, где $x \in L$, называется *линейным многообразием* (или *линейным аффинным многообразием*, или *линейным точечным многообразием*) *пространства* V, *полученным сдвигом подпространства* L *на вектор* x_0. Вектор x_0 называется *вектором сдвига*, а подпространство L – *направляющим подпространством* линейного многообразия H.

Обозначение: $H = x_0 + L$. Итак, $x_0 + L = \{x_0 + x | x \in L\}$.

Очевидно, линейное подпространство L является частным случаем линейного многообразия, когда вектор сдвига $x_0 \in L$.

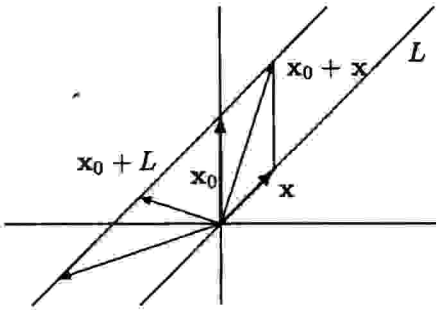


Рис. 1

Пример. Пусть на плоскости V_2 задано некоторое подпространство L, т.е. совокупность всех векторов $\mathbf{x}$, концы которых лежат на прямой, проходящей через начало координат. И пусть $\mathbf{x_0}$ – некоторый фиксированный вектор плоскости (рис. 1). Тогда нетрудно показать, что линейное многообразие $\mathbf{x_0} + L$ есть множество векторов, концы которых лежат на прямой, полученной из прямой L сдвигом ее на вектор $\mathbf{x_0}$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. *Вектор сдвига* x_0 *принадлежит линейному многообразию*, так как $x_0 = x_0 + \theta$, $\theta \in L$.

2°. *Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству*, так как если $z_1 = x_0 + x$, $x \in L$, $z_2 = x_0 + y$, $y \in L$, то $z_1 - z_2 = x - y \in L$.

Теорема 18.2. *Два линейных многообразия* $H_1 = x_1 + L_1$ *и* $H_2 = x_2 + L_2$ *совпадают тогда и только тогда, когда* $L_1 = L_2 = L$ *и* $x_1 - x_2 \in L$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $H_1 = H_2$, тогда $x_1 \in H_2$ и, в силу свойства 2°, $x_1 - x_2 \in L_2$. Покажем, что $L_1 = L_2$. Для произвольного вектора $x \in L_1$ имеем $x_1 + x \in H_1$. Так как $H_1 = H_2$, то

существует вектор $y \in L_2$ такой, что $x_1 + x = x_2 + y$. Таким образом, $x = (x_2 - x_1) + y$, где $x_2 - x_1 \in L_2$, $y \in L_2$. Отсюда следует, что $x \in L_2$ и $L_1 \subset L_2$. Аналогично доказывается, что $L_2 \subset L_1$. Оба вложения говорят о том, что $L_1 = L_2$.

Достаточность. Пусть $L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L$. Тогда для произвольного вектора $z \in H_1$ имеем $z = x_1 + x$, где $x \in L$, или $z = x_2 + (x_1 - x_2) + x$, $x \in L$. Так как $x_1 - x_2 \in L$ и $x \in L$, то $(x_1 - x_2) + x \in L$, следовательно, $z \in H_2$ и $H_1 \subset H_2$. Аналогично получаем, что $H_2 \subset H_1$. Это означает, что $H_1 = H_2$. ■

Следствие 1. *Вектором сдвига может служить любой вектор линейного многообразия.*

Действительно, если x_1 – произвольный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, то $x_1 - x_0 \in L$ и $H = x_1 + L$.

Следствие 2. *Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства.* Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы.

Следствие 2 позволяет переносить некоторые характеристики направляющего подпространства на само линейное многообразие. *Размерностью линейного многообразия* называется размерность его направляющего подпространства. Обозначение: $\dim H$. Линейное многообразие размерности единица называется *прямой в линейном пространстве*, размерности $(n-1)$, где $n = \dim V$, – *гиперплоскостью*, а размерности k, $1 < k < n-1$, – *k-мерной плоскостью.*

Пример. Из определения следует, что прямая на плоскости V_2 и плоскость в пространстве V_3 – гиперплоскости в пространствах V_2 и V_3. Естественно ожидать, что, представляя собой один и тот же объект, они обладают общими свойствами. В этом мы убедимся в последующих главах.

Глава V. Векторная алгебра

От алгебраического определения координат вектора перейдем к их геометрическому описанию.

Рассмотрим линейные пространства V_1, V_2, V_3 векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. В §15, 17 было доказано, что:

• $\dim V_1 = 1$, а любой ненулевой вектор $\mathbf{e_1}$ является базисом V_1,

• $\dim V_2 = 2$, а любая пара неколлинеарных векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ является базисом V_2,

• $\dim V_3 = 3$, а любая тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ является базисом V_3.

При доказательстве теорем §15 практически показано, как находятся координаты векторов в этих пространствах. Вернемся к этому вопросу.

§ 19. Координаты вектора

1. Пусть $\mathbf{e_1}$ – базис V_1 и $\mathbf{a}$ – произвольный вектор из V_1. Отложим эти векторы от одной точки O прямой V_1 (§15, рис. 2,*а*), так что $\mathbf{e_1} = \overrightarrow{OE}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA_1}$; тогда $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e_1}$, где

$$x = \begin{cases} |\overrightarrow{OA_1}|/|\overrightarrow{OE}|, & \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{e_1}, \\ -|\overrightarrow{OA_1}|/|\overrightarrow{OE}|, & \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{e_1}. \end{cases} \tag{19.1}$$

Введем на прямой V_1 направление: пусть положительное направление на прямой совпадает с направлением базисного вектора $\mathbf{e_1}$. Тогда согласно (19.1) и (10.1) получим

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e_1}|} = \frac{(\mathbf{a})}{|\mathbf{e_1}|}. \tag{19.2}$$

Ось, положительное направление которой совпадает с направлением вектора $\mathbf{e}$, будем называть *осью, определенной вектором* $\mathbf{e}$.

2. Пусть $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ – базис V_2 и $\mathbf{a}$ – произвольный вектор из V_2. Отложив эти векторы от одной точки O плоскости V_2 (§15, рис. 2,*б*), так что $\mathbf{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$, $\mathbf{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, и введя направления на прямых OE_1 и OE_2, совпадающие с направлениями базисных векторов $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$, получим в соответствии с (19.2), что $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e_1} + y\,\mathbf{e_2}$,

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e_1}|}, \quad y = \frac{(\overrightarrow{OA_2})}{|\mathbf{e_2}|}, \tag{19.3}$$

где A_1, A_2 – проекции точки A на прямые OE_1 и OE_2, параллельные соответственно прямым OE_2 и OE_1.

3. Пусть $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ – базис V_3 и $\mathbf{a}$ – произвольный вектор из V_3. Поступая аналогично (§15, рис. 2,*в*), получим $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e_1} + y\,\mathbf{e_2} + z\,\mathbf{e_3}$,

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e_1}|}\,,\quad y = \frac{(\overrightarrow{OA_2})}{|\mathbf{e_2}|}\,,\quad z = \frac{(\overrightarrow{OA_3})}{|\mathbf{e_3}|}\,, \tag{19.4}$$

где A_1, A_2, A_3 – проекции точки A на прямые OE_1, OE_2 и OE_3, параллельные соответственно плоскостям OE_2E_3, OE_1E_3 и OE_1E_2.

§ 20. Координаты точки

Аффинная система координат. Пусть в пространстве V_3 (на плоскости V_2 или на прямой V_1) зафиксирована некоторая точка O, называемая *полюсом*. Для любой точки A вектор $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором точки A относительно полюса O*. Задание точки ее радиус-вектором определяет, очевидно, биективное отображение. Тот факт, что точка A имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$, обозначают символом $A(\mathbf{r})$.

Если в пространстве V_3 зафиксированы точка O и базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, то говорят, что в пространстве задана *аффинная система координат* (или *общая декартова система координат*) $\{O;\,\mathbf{e_1},\,\mathbf{e_2},\,\mathbf{e_3}\}$. Точка O называется *началом координат*; оси, проходящие через начало координат и определенные векторами $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, называются *осями координат* и обозначаются Ox (ось абцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат) соответственно. Плоскость, определяемая осями координат Ox и Oy (Ox и Oz, Oy и Oz), называется *координатной плоскостью* Oxy (Oxz, Oyz соответственно). В этой терминологии аффинная система координат обозначается также символом $Oxyz$.

Координатами точки A в аффинной системе координат $\{O;\,\mathbf{e_1},\,\mathbf{e_2},\,\mathbf{e_3}\}$ называются координаты радиус-вектора $\mathbf{r}_A$ этой точки в базисе $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$. Тот факт, что точка A имеет координаты x, y, z, обозначают символом $A(x, y, z)$. Итак,

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{e_1} + y\,\mathbf{e_2} + z\,\mathbf{e_3} \iff A(x, y, z). \tag{20.1}$$

Замечание 1. Из определения следует, что любая точка A пространства в заданной системе координат имеет координаты, причем точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Замечание 2. Координаты точки $A(x, y, z)$ определяются соотношениями (19.4). При этом, как легко видеть, проекции A_1, A_2, A_3 точки A имеют координаты $A_1(x, 0, 0)$, $A_2(0, y, 0)$, $A_3(0, 0, z)$.

Аналогично определяются аффинные системы координат $\{O;\,\mathbf{e_1},\,\mathbf{e_2}\}$ на плоскости V_2 и $\{O;\,\mathbf{e_1}\}$ на прямой V_1, а также координаты

точки $A(x, y)$ и $A(x)$ соответственно. При этом имеют место очевидные аналоги соотношения (20.1) и обоих замечаний. В дальнейшем все факты будем излагать только в терминах пространства V_3.

Замечание 3. В традиционных курсах аналитической геометрии координаты точки вводятся с помощью *метода координат*, базирующегося на аксиомах геометрии. Это приводит к достаточно сложной аксиоматике (см. Приложение), вообще говоря, практически не использующейся в других разделах математики. Введение координат точки с помощью вектора (т.е. используя векторную аксиоматику линейного пространства) значительно упрощает все исследования, сводя геометрические построения к свойствам вещественных чисел.

Теорема 20.1. *Если* $A(x_1, y_1, z_1)$ *и* $B(x_2, y_2, z_2)$ *– точки пространства, заданные своими координатами в системе координат* $\{O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *то вектор* $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *имеет координаты* $\mathbf{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

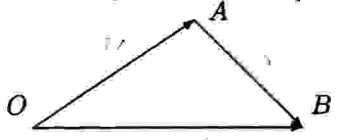


Рис. 1

Доказательство. Действительно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 1) и, следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. Так как $\mathbf{r}_A = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{r}_B = \{x_2, y_2, z_2\}$, то в силу свойства линейности координат отсюда следует утверждение теоремы. ■

Деление отрезка в данном отношении. Говорят, что *точка* $M \neq B$ *делит ненулевой отрезок* $[AB]$ *в отношении* λ, если $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ (рис. 2).

Рис. 2

Обозначение: $(ABM) = \lambda$. Из определения следует, что точка M расположена на прямой AB, при этом (рис. 2):

1) если M – внутренняя точка отрезка $[AB]$, то $\lambda > 0$;

2) если $M = A$, то $\lambda = 0$;

3) если M расположена вне отрезка $[AB]$, то $\lambda < 0$.

Заметим, что других вариантов расположения точки M не может быть и что ни в одном из возможных вариантов λ не равно -1.

Теорема 20.2. *Пусть* $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $M(\mathbf{r}_3)$ *– точки пространства и* $(ABM) = \lambda$. *Тогда*

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2}{1 + \lambda}. \qquad (20.2)$$

Доказательство. Условие $(ABM) = \lambda$ означает, что $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ или $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$. Отсюда следует (20.2). ■

Следствие. Соотношение (20.2) *в координатной форме имеет следующий вид: для* $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $M(x_3, y_3, z_3)$

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{20.3}$$

Прямоугольные координаты. Базис $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$, где $n = 1, 2, 3$, называется *ортонормированным*, если векторы базиса

1) имеют единичную длину

и, в случае $n > 1$,

2) попарно перпендикулярны.

Аффинная система координат $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, соответствующая ортонормированному базису $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$, называется *прямоугольной декартовой системой координат.*

§ 21. Проекции вектора и координаты

Проекции вектора на плоскости. Пусть на плоскости P даны две непараллельные прямые l и L. *Проекцией направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется (рис. 1) направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1, B_1 – проекции точек A и B на прямую l параллельно прямой L. Обозначение: $pr_l^L \overrightarrow{AB}$.

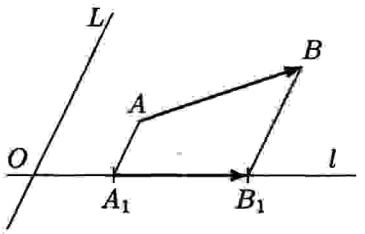


Рис. 1

Теорема 21.1. *Проекции равных направленных отрезков равны.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, покажем, что $pr_l^L \overrightarrow{AB} = pr_l^L \overrightarrow{CD}$. Введем на плоскости систему координат $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$, где O – точка пересечения прямых l и L, $\mathbf{e_1}$ – базис на прямой l, $\mathbf{e_2}$ – базис на прямой L. Пусть точки A, B, C, D имеют координаты $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$. Так как $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то согласно теореме 20.1

$$x_B - x_A = x_D - x_C. \tag{21.1}$$

Так как точки A_1, B_1, C_1, D_1 имеют координаты $A_1(x_A, 0)$, $B_1(x_B, 0)$, $C_1(x_C, 0)$, $D_1(x_D, 0)$ (§20, замечание 2), то $\mathbf{b} = \overrightarrow{A_1B_1} = \{x_B - x_A, 0\}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{C_1D_1} = \{x_D - x_C, 0\}$. Согласно (21.1) отсюда следует, что $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Это означает, что $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$ порождают один и тот же вектор и поэтому равны. ■

Проекцией вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется вектор, порожденный $pr_l^L \overrightarrow{AB}$. Обозначение: $pr_l^L \mathbf{a}$. Корректность определения вытекает из теоремы 21.1.

Теорема 21.2. *Проекция вектора на прямую* l *параллельно прямой* L *обладает свойством линейности:*

1) $pr_l^L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = pr_l^L \mathbf{a} + pr_l^L \mathbf{b}$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$,

2) $pr_l^L(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \cdot pr_l^L \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, рассмотренном выше, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ имеют координаты $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$. Тогда $pr_l^L \mathbf{a} = \{a_1, 0\}$, $pr_l^L \mathbf{b} = \{b_1, 0\}$ и в силу линейности координат $pr_l^L \mathbf{a} + pr_l^L \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, 0\}$. С другой стороны, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}$ и $pr_l^L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \{a_1 + b_1, 0\}$. Следовательно, $pr_l^L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = pr_l^L \mathbf{a} + pr_l^L \mathbf{b}$. Аналогично доказывается второе условие линейности. ■

Замечание 1. Формулы (19.3) для координат вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ плоскости V_2 могут быть записаны в терминах проекций вектора на ось в виде

$$x = \frac{(pr_x \mathbf{a})}{|\mathbf{e}_1|}, \qquad y = \frac{(pr_y \mathbf{a})}{|\mathbf{e}_2|}, \tag{21.2}$$

где $pr_x \mathbf{a}$ и $pr_y \mathbf{a}$ – проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси, определенные векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно (т.е. оси координат Ox и Oy), параллельно другой оси (т.е. оси Oy и Ox соответственно).

Проекции вектора в пространстве. Пусть в пространстве заданы плоскость π и непараллельная ей прямая l. *Проекцией направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на прямую* l (*на плоскость* π) *параллельно плоскости* π (соответственно *прямой* l) называется (рис. 2) направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ ($\overrightarrow{A_2B_2}$), где A_1 и B_1 (A_2 и B_2) – проекции точек A и B на прямую l (плоскость π) параллельно плоскости π (прямой l). Обозначение: $pr_l^\pi \overrightarrow{AB}$, $pr_\pi^l \overrightarrow{AB}$.

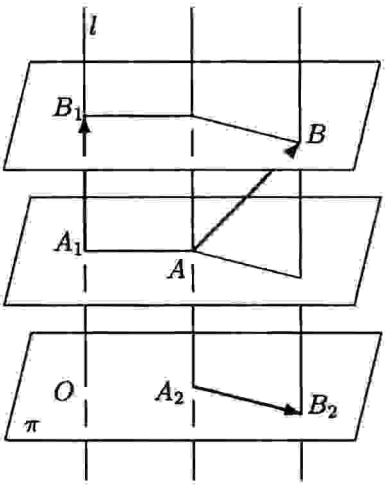


Рис. 2

Для обеих проекций справедливо утверждение теоремы 21.1: *проекции равных направленных отрезков равны.* Доказательство утверждения для проекций в пространстве отличается от доказательства теоремы 21.1 только тем, что система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ состоит из точки O пересече-

ния прямой l с плоскостью π, базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ плоскости π и базиса $\mathbf{e}_3$ прямой l.

Проекцией вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ *на прямую* l (*плоскость* π) *параллельно плоскости* π (*прямой* l) называется вектор, порожденный $pr_l^{\pi}\overrightarrow{AB}$ ($pr_{\pi}^{l}\overrightarrow{AB}$). Обозначение: $pr_l^{\pi}\,\mathbf{a}$, $pr_{\pi}^{l}\,\mathbf{a}$. *Обе проекции вектора обладают свойством линейности.* Доказательство этого факта повторяет доказательство теоремы 21.2 с той лишь разницей, что рассматривается система координат $\{O;\, \mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$, упомянутая выше.

Замечание 2. Формулы (19.4) для координат вектора $\mathbf{a} \in V_3$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ могут быть записаны в терминах проекций вектора на ось в виде

$$x = \frac{(pr_x\,\mathbf{a})}{|\,\mathbf{e}_1|}, \qquad y = \frac{(pr_y\,\mathbf{a})}{|\,\mathbf{e}_2|}, \qquad z = \frac{(pr_z\,\mathbf{a})}{|\,\mathbf{e}_3|}, \tag{21.3}$$

где $pr_x\,\mathbf{a}$, $pr_y\,\mathbf{a}$, $pr_z\,\mathbf{a}$ – проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси, определенные базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (т.е. оси координат Ox, Oy, Oz), параллельно координатным плоскостям Oyz, Oxz, Oxy соответственно.

Теорема 21.3. *На плоскости (в пространстве) величина проекции вектора на ось параллельно прямой (соответственно плоскости) обладает свойством линейности.*

Утверждение теоремы следует из того, что величины рассматриваемых проекций пропорциональны координатам (согласно (21.2) и (21.3)), которые обладают свойством линейности (теорема 17.3). ■

Мы определили три различные проекции вектора. Во всех трех случаях, если $l \perp L$ или $l \perp \pi$, проекции вектора называются *ортогональными проекциями.*

§ 22. Скалярное произведение

Определение и основные свойства. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – ненулевые векторы. Отложим их от одной точки O. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. *Углом между векторами* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется наименьший угол между лучами $[OA)$ и $[OB)$. Обозначение: $(\widehat{\mathbf{a},\, \mathbf{b}})$. Корректность определения очевидна. Из определения следует, что $0 \le (\widehat{\mathbf{a},\, \mathbf{b}}) \le \pi$.

Скалярным произведением ненулевых *векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то скалярное произведение этих векторов по определению считается равным нулю. Обозначение: $(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$. Итак, для ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = |\,\mathbf{a}| \cdot |\,\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a},\, \mathbf{b}}). \tag{22.1}$$

Обозначим через $pr_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на ось, определенную вектором $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ (рис. 1).

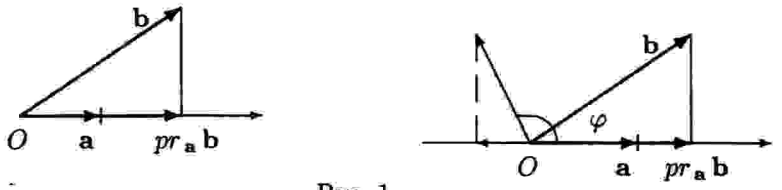


Рис. 1

Теорема 22.1. *Если* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *то для любого вектора* $\mathbf{b}$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,(pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}). \tag{22.2}$$

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно для $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ и $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/2$. Пусть $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ и $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \neq \pi/2$. Тогда (рис. 1)

$$|pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}| = |\mathbf{b}| \cdot |\cos\varphi| = \begin{cases} |\mathbf{b}|\cos\varphi, & pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}, \\ -|\mathbf{b}|\cos\varphi, & pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $(pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\cos\varphi$ и, тем самым, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,(pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b})$. Вторая часть соотношения (22.2) вытекает из первой, так как $pr_{\mathbf{a}}\,pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. ■

Теорема 22.2. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *и числа* $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$;

3) $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

4) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$, *причем*

$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Свойства 1 и 4 очевидны. Докажем свойство 2. Имеем $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\,(pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}))$ = {согласно теореме 21.3} $= |\mathbf{c}|\,(pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a}) + |\mathbf{c}|\,(pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$. Аналогично проверяется свойство 3. ■

Следствие 1. *Из свойств 1–3 следует, что скалярное произведение линейно и по второму множителю:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Скалярное произведение в координатах. Свойство линейности скалярного произведения позволяет перемножать линейные комбинации векторов (т.е. находить их скалярное произведение):

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j). \tag{22.3}$$

Это, в частности, означает, что скалярное произведение векторов может быть вычислено по их координатам, если известна "таблица умножения" базисных векторов. Возможность подобного вычисления скалярного произведения векторов позволяет определить по известным

координатам длину вектора и угол между векторами, так как $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})/(|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|)$.

Задача вычисления скалярного произведения векторов по их координатам существенно упрощается, если рассматривается ортонормированный базис. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Из определения следует, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда либо один из них нулевой, либо они перпендикулярны. В терминах ортогональности векторов ортонормированность базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $n = 1, 2, 3$, означает, что

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{22.4}$$

Теорема 22.3. *Скалярное произведение векторов* $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$ *и* $\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3$ *равно сумме попарных произведений координат:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \beta_i \tag{22.5}$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *– ортонормированный базис.*

Доказательство. Достаточность вытекает из (22.3) и (22.4).

Необходимость. Соотношения (22.4) вытекают из (22.5), если учесть, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ имеют координаты $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ соответственно. ■

Следствие 2. *Если векторы* $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathbf{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *заданы координатами в ортонормированном базисе, то*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}; \quad \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}. \tag{22.6}$$

Следствие 3. *В прямоугольной декартовой системе координат расстояние* $\rho(A, B)$ *между точками* $A(x_1, y_1, z_1)$ *и* $B(x_2, y_2, z_2)$ *находится по формуле*

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Это равенство следует из того, что $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$ и $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Направляющие косинусы. *Направляющими косинусами вектора (луча)* называются косинусы углов, образованных этим вектором (соответственно лучом) с осями координат. Для прямоугольной декартовой системы координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{e}$ совпадают с координатами вектора $\mathbf{e}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, так как если $\mathbf{e} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$, то $\alpha_k = (\mathbf{e}, \mathbf{e}_k) = \cos(\mathbf{e}, \mathbf{e}_k)$, $k = 1, 2, 3$.

§ 23. Векторное и смешанное произведения

Ориентация в вещественном линейном пространстве. В §19 при рассмотрении оси, определенной ненулевым вектором $\mathbf{e}$, мы фактически ввели ориентацию на прямой, назвав положительным то направление, которое совпадает с направлением вектора $\mathbf{e}$. Прежде чем вводить определение ориентации, общее для прямой, плоскости и пространства, снова обратимся к прямой. Каждый ненулевой вектор $\mathbf{e}$ прямой образует базис, и переход от одного базиса к другому осуществляется умножением этого вектора на ненулевое число. Так как это число либо положительно, либо отрицательно, то все базисы на прямой разбиваются ровно на два класса: базисные векторы одного класса имеют одинаковое направление, а любые два базисных вектора разных классов имеют противоположные направления. Тот факт, что базисные векторы относятся к одному классу, на алгебраическом языке означает, что они отличаются *положительным множителем*. Именно этим мы и воспользуемся для определения ориентации.

Два базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ линейного пространства V называются *одинаково ориентированными*, если матрица перехода $C_{e \to e'}$ имеет положительный определитель, и *противоположно ориентированными* – в противном случае.

Замечание 1. Из определения и из свойств определителя следует, что два базиса, получающиеся друг из друга

– перестановкой двух их векторов или

– умножением какого-либо вектора на отрицательное число,

противоположно ориентированы.

Теорема 23.1. *Отношение одинаковой ориентированности является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства V.*

Доказательство. Действительно, рефлексивность отношения следует из того, что переход от базиса к самому себе осуществляется с помощью единичной матрицы, симметричность – из теоремы 17.5 и очевидного факта: $|C^{-1}| \cdot |C| > 0$, транзитивность – из того, что если $e' = eC$, $e'' = e'D$, то $e'' = e(CD)$, при этом $|CD| = |C| \cdot |D| > 0$. ■

Так как определитель матрицы перехода от одного базиса к другому либо положителен, либо отрицателен, то множество всех базисов пространства разбивается отношением одинаковой ориентированности ровно на два непересекающихся класса (класса эквивалентности) так, что всякий базис принадлежит одному и только одному классу, два базиса одного класса одинаково ориентированы, а любые два базиса из разных классов противоположно ориентированы.

Один из указанных классов называют классом *правых* (или *положительно ориентированных*) *базисов*, а другой – *левых* (*отрицательно ориентированных*). Каждый из этих двух классов называется *ориентацией пространства*. Вещественное линейное пространство с выбранной на нем ориентацией называется *ориентированным пространством*. Так как класс эквивалентности порождается любым своим представителем, то для того, чтобы ориентировать линейное пространство, достаточно задать один какой-нибудь базис пространства и объявить положительно ориентированными все одноименные с ним базисы.

Класс правых базисов на плоскости V_2 и в пространстве V_3 обычно выбирают следующим образом:

– упорядоченную пару неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ плоскости называют *правой* (*положительно ориентированной*), если кратчайший поворот (рис. 1) от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ выполняется против часовой стрелки, и *левой* (*отрицательно ориентированной*) – в противном случае (начала векторов считаются совмещенными);

– упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ пространства называют *правой* (*положительно ориентированной*), если из конца вектора $\mathbf{e}_3$ (рис. 2) кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левой* (*отрицательно ориентированной*) – в противном случае (начала векторов тройки считаются совмещенными).

Рис. 1

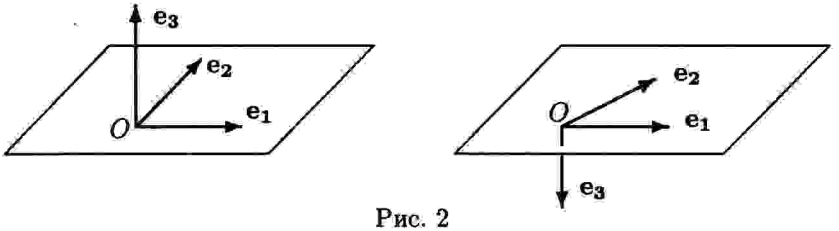


Рис. 2

Практически задание ориентации в геометрических пространствах означает задание направления движения на прямой (слева направо или наоборот), направления вращения на плоскости (против часовой стрелки или наоборот) или винта в пространстве (правого или левого).

Определения и основные свойства. Пусть в пространстве V_3 выбрана ориентация. Базисы, задающие эту ориентацию, назовем правыми (положительными).

Векторным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$,

2) $\mathbf{c}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

и если $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, то

3) $\mathbf{c}$ направлен так, что упорядоченная тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – правая. Если один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то векторное произведение считается равным $\mathbf{0}$. Обозначение: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Теорема 23.2 (критерий коллинеарности). *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Доказательство. Действительно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, либо $\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$; это равносильно тому, что $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 0$, т.е. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$. ■

Замечание 2. Из теоремы 23.2 следует, что определение векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ для коллинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заканчивается требованием 1. Если же $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то условия 1 и 2 означают, что:

а) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\mathbf{ab}}$, где $S_{\mathbf{ab}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

б) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, определяемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Теорема 23.3. *Векторное произведение антикоммутативно, т.е.* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, тогда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \neq \mathbf{0}$, при этом $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |[\mathbf{b}, \mathbf{a}]| = S_{\mathbf{ab}}$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ перпендикулярны плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Значит, либо $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, либо $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$. Но вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \neq [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, так как тройка векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ – правая (по определению векторного произведения) и, следовательно, тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ – левая (см. замечание 1). ■

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{c}$. Обозначение: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Итак, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$.

Теорема 23.4 (критерий компланарности). *Векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *компланарны тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны. Будем считать, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ (в каждом из этих случаев, очевидно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$). Тогда $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ параллельны плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, причем $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Следовательно, $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = 0$.

Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Тогда либо $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 0$, либо $|\mathbf{c}| = 0$, либо $\cos\varphi = 0$, где φ – угол между векторами $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{c}$. Это означает, что либо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, либо $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{c}$ параллелен плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Во всех этих случаях $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. ■

Теорема 23.5. *Смешанное произведение некомпланарных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *равно по абсолютной величине объему* V *параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. *При этом*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ – правая тройка;} \\ -V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ – левая тройка.} \end{cases}$$

Доказательство. Из некомпланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ следует, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$.

Отложив векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ от одной точки O (рис. 3), получим параллелепипед, ребрами которого являются эти векторы. Обозначим через h высоту параллелепипеда, опущенную из конца вектора $\mathbf{c}$. Тогда $V = S_{\mathbf{ab}} h$. Отсюда и из замечания 2 следует, что

$$V = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\cos\varphi| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|. \qquad (23.1)$$

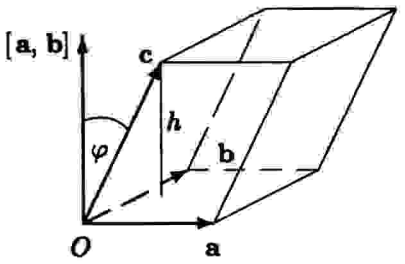


Рис. 3

Знак $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ определяется только знаком $\cos\varphi$, но $\cos\varphi > 0$ тогда и только тогда, когда векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{c}$ направлены в одну сторону от плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. тогда и только тогда, когда тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – правая. В силу (23.1) отсюда следует утверждение теоремы. ■

Теорема 23.6. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *выполняется равенство*

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]). \tag{23.2}$$

Доказательство. Утверждение очевидно для компланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (в силу теоремы 23.4). Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – не компланарны. Тогда тройки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ одинаково ориентированы (см. замечание 1). Так как $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$, то из теоремы 23.5 следует (23.2). ■

Следствие 1. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *имеют место равенства*

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}).\end{aligned} \tag{23.3}$$

Следствие 2. *Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей.* Это утверждение вытекает из (23.3) и линейности скалярного произведения. ■

Теорема 23.7. *Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Доказательство. В силу теоремы 23.3 достаточно показать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место равенства $[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Пусть $\mathbf{d} = [\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}]-[\mathbf{a}, \mathbf{c}]-[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Тогда $(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})-(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})-(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$. Из линейности смешанного произведения следует, что $(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0$. Это доказывает первое из требуемых равенств. Второе равенство доказывается аналогично. ■

Векторное и смешанное произведения в прямоугольных координатах. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис пространства и пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – правая тройка.

1. Найдем координаты векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Согласно теоремам 23.2 и 23.7 имеем $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3] = a_1b_2[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] + a_1b_3[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] + a_2b_1[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1]+a_2b_3[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]+a_3b_1[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]+a_3b_2[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2]$. Отсюда в силу

теоремы 23.3 следует, что

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

Пусть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$. Тогда, используя равенство (22.4), теоремы 23.3–23.5 и замечание 1 (§23), получаем, что $x = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{e}_1) =$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично находим $y = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$, $z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Итак,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3, \tag{23.4}$$

или, в условной записи в виде мнемонического определителя,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{23.5}$$

(имеется в виду разложение этого определителя по первой строке).

2. Из равенств (23.4) и (22.5) непосредственно находится и смешанное произведение векторов $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{23.6}$$

Замечание 3. Если исходный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ отрицательно ориентирован, то $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -1$ (теорема 23.5) и, следовательно, в соотношениях (23.4) – (23.6) следует изменить знаки на противоположные:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \right),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

§ 24. Преобразование координат

Преобразование аффинной системы координат. Пусть в пространстве даны две аффинные (общие декартовы) системы координат: $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$. Первую из них будем называть "старой" системой координат, а вторую – "новой". Пусть

известно положение новой системы координат относительно старой: $O'(\alpha, \beta, \gamma)$ и $C = (c_{ij})$ – матрица перехода от базиса e к базису e', т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{e_1}' &= c_{11}\,\mathbf{e_1} + c_{21}\,\mathbf{e_2} + c_{31}\,\mathbf{e_3}, \\ \mathbf{e_2}' &= c_{12}\,\mathbf{e_1} + c_{22}\,\mathbf{e_2} + c_{32}\,\mathbf{e_3}, \\ \mathbf{e_3}' &= c_{13}\,\mathbf{e_1} + c_{23}\,\mathbf{e_2} + c_{33}\,\mathbf{e_3}. \end{aligned} \tag{24.1}$$

Пусть M – произвольная точка пространства. Исследуем, как изменяются ее координаты при переходе к новой системе координат. Обозначим через (x, y, z) и (x', y', z') координаты точки M в старой и новой системах координат, через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ – радиус-векторы точки M относительно полюсов O и O' соответственно, а через $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки O' относительно полюса O. Тогда по определению координат точки

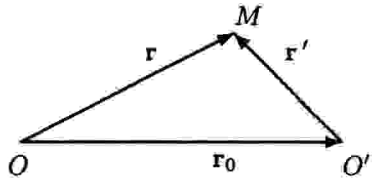


Рис. 1

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}'_{e'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{r}_0)_e = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ означает (рис. 1), что $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$. Перейдя в этом векторном равенстве к равенству координат в базисе e, получаем с учетом (17.8), что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{ или } \begin{aligned} x &= \alpha + c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= \beta + c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= \gamma + c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Соотношения (24.2) называются *формулами преобразования координат*. Эти формулы выражают старые координаты точки через новые.

Ортогональная матрица. Вещественная матрица C называется *ортогональной*, если

$$CC^T = C^TC = I. \tag{24.3}$$

Из определения следует, что:

1) C – квадратная матрица;

2) $C^{-1} = C^T$;

3) C^{-1} – ортогональная матрица;

4) $|C| = \pm 1$;

5) матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ортогональна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \tag{24.4}$$

6) произведение ортогональных матриц – ортогональная матрица.

Теорема 24.1. *Матрица $C = (c_{ij})$ перехода от ортонормированного базиса $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$ ортогональна тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}'$ – ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ – базисы пространства. Из равенств (24.1) следует, что столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ в базисе $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Согласно теореме 22.3 отсюда получаем, что $(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j') = \sum_{k=1}^{3} c_{ki}c_{kj}$. Следовательно, условие ортонормированности базиса e' равносильно условию (24.4) ортогональности матрицы C. Аналогично рассматривается случай плоскости или прямой. ■

Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости. Пусть $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ – прямоугольные декартовы системы координат на плоскости, т.е. $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и $e' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$ – ортонормированные базисы и матрица перехода $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ортогональна. Согласно (24.4) имеем

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1, \quad c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0, \quad c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1.$$

Из первого равенства следует существование такого φ, что $c_{11} = \cos\varphi$, $c_{21} = \sin\varphi$. Из второго равенства следует, что $c_{12} = k\sin\varphi$, $c_{22} = -k\cos\varphi$. Отсюда и из третьего равенства получим, что $k = \pm 1$.

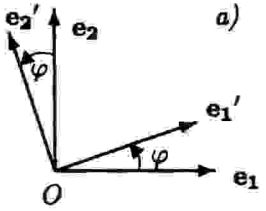
Итак, ортогональная матрица второго порядка определяется лишь единственным параметром φ, при этом либо

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{либо} \quad C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad (24.5)$$

1. Пусть $C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, тогда $|C| = 1$ и

$$\mathbf{e}_1' = \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2' = -\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_2.$$

Умножив скалярно обе части этих равенств на $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, получим (рис. 2,*а*), что $(\widehat{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1}) = \varphi$, $(\widehat{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $(\widehat{\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_1}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$, $(\widehat{\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_2}) = \varphi$ (все углы отсчитываются в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$).



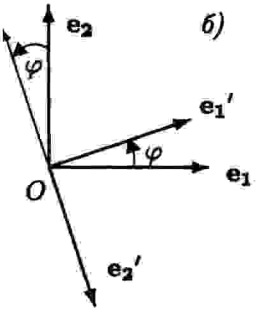


Рис. 2

Это означает, что базисы e и e' одинаково ориентированы и что система координат $\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ может быть совмещена с $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ путем переноса начала и поворота на угол φ вокруг начала. При этом формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x &= \alpha + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= \beta + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \tag{24.6}$$

2. Пусть $C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$, тогда $|C| = -1$ и

$$\mathbf{e}_1' = \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2' = \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_1 - \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_2.$$

Поступая аналогично п. 1, получим (рис. 2,*б*), что

$$(\widehat{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1}) = \varphi, \quad (\widehat{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2}) = (\widehat{\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_1}) = \tfrac{\pi}{2} - \varphi, \quad (\widehat{\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_2}) = \pi - \varphi.$$

В этом случае базисы e и e' противоположно ориентированы и система координат $\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ не может быть совмещена с $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ путем переноса начала и поворота; после поворота на угол φ нужно выполнить отражение относительно оси $\mathbf{e}_1'$ (т.е. изменить направление $\mathbf{e}_2'$). При этом формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x &= \alpha + x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ y &= \beta + x'\sin\varphi - y'\cos\varphi. \end{cases}$$

Заметим, что в обоих случаях положение второго базиса $e' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$ относительно первого $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ однозначно определяется лишь *одним* параметром – углом φ.

Преобразование прямоугольной декартовой системы координат в пространстве. Пусть $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ – прямоугольные декартовы системы координат в пространстве, т. е. $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $e' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ – ортонормированные базисы и матрица перехода $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ортогональна. Аналогично тому, как это было на плоскости, положение второго базиса e' относительно первого e может быть однозначно определено лишь *тремя* параметрами – так называемыми углами Эйлера.

Введем эти углы. Будем считать, что обе системы координат одноименны и имеют общее начало O. Пусть для определенности базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ образуют правые тройки.

Обозначим через Ou ось, совпадающую с линией пересечения координатной плоскости Oxy первой системы координат с координатной плоскостью $Ox'y'$ второй системы и направленную в ту сторону, откуда кратчайший поворот от оси Oz к оси Oz' виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 1). Очевидно, ось Ou перпендикулярна плоскости Ozz'. Пусть теперь ψ – угол между осями Ox и Ou, отсчитываемый в плоскости Oxy от оси Ox в направлении кратчайшего поворота от оси Ox к оси Oy; θ — угол между осями Oz и Oz', не превосходящий π (так как системы координат одноименны); φ – угол между осями Ou и Ox', отсчитываемый в плоскости $Ox'y'$ от оси Ou в направлении кратчайшего поворота от оси Ox' к оси Oy'.

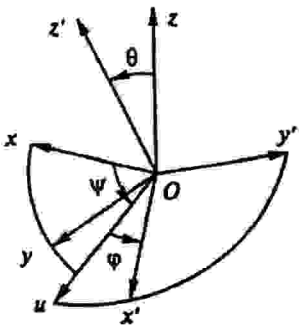


Рис. 1

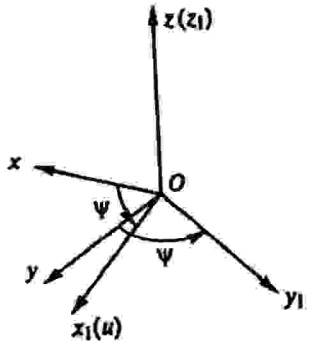


Рис. 2

Три угла
ψ, $0 \le \psi < 2\pi$, от Ox до Ou в плоскости Oxy;
θ, $0 \le \theta \le \pi$, от Oz до Oz' в плоскости Ozz';
φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, от Ou до Ox' в плоскости $Ox'y'$
называются *углами Эйлера* системы координат $Ox'y'z'$ относительно $Oxyz$.

Если заданы три угла Эйлера, то преобразование первой системы координат $Oxyz$ во вторую $Ox'y'z'$ можно представить в виде последовательного проведения трех плоских поворотов:

1) поворота плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол ψ, при этом повороте ось Ox совместится с осью Ou, ось Oz останется на месте, а вся система координат $Oxyz$ перейдет в систему координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 2);

2) поворота плоскости Oy_1z_1 вокруг оси Ox_1 на угол θ, при этом повороте ось Oz_1 совпадет с осью Oz', плоскость Ox_1y_1 совместится с плоскостью $Ox'y'$, а вся система координат перейдет в систему координат $Ox_2y_2z_2$ (рис. 3);

3) поворота плоскости Ox_2y_2 вокруг оси Oz_2 на угол φ, при этом повороте система координат $Ox_2y_2z_2$ совместится с системой координат $Ox'y'z'$ (рис. 4).

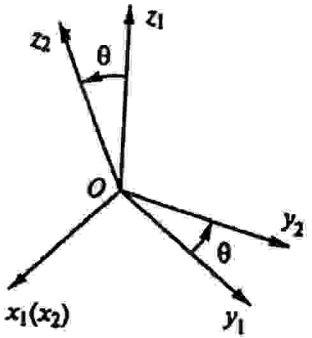


Рис. 3

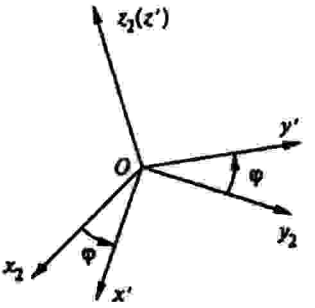


Рис. 4

Каждый из указанных трех поворотов производится в *одной из координатных плоскостей* соответствующей системы координат, поэтому формулы преобразования координат в соответствии с (24.5) будут иметь следующий вид:

1) для первого поворота

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad C_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{24.7}$$

2) для второго поворота

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \tag{24.8}$$

3) для третьего поворота

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = C_3 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad C_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{24.9}$$

Из (24.7)–(24.9) следует, что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad C = C_1 C_2 C_3 \tag{24.10}$$

и

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi, \\ c_{12} &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi, \\ c_{13} &= \sin\psi\sin\theta, \\ c_{21} &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi, \\ c_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi, \\ c_{23} &= -\cos\psi\sin\theta, \\ c_{31} &= \sin\theta\sin\varphi, \\ c_{32} &= \sin\theta\cos\varphi, \\ c_{33} &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{24.11}$$

Равенство (24.10) в силу ортогональности матриц C_1, C_2, C_3 дает обратное выражение новых координат через старые

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = C_3^T C_2^T C_1^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Соотношения (24.10) и (24.11) получены в предположении, что обе системы координат имеют общее начало. Если же эти системы координат имеют начало в разных точках, но получаются одна из другой параллельным переносом, то равенства (24.10) и (24.11) не меняют своего вида, так как ни направления осей, ни величины углов Эйлера при этом не изменяются. Таким образом, формулы преобразования координат имеют вид (24.2), где величины c_{ij} определены соотношениями (24.11) через углы Эйлера.

Итак, преобразование прямоугольной декартовой системы координат в одноименную систему координат состоит в последовательном проведении параллельного переноса и трех плоских вращений.

Если же системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ разноименны (угол θ больше π), то после параллельного переноса и поворотов на углы Эйлера необходимо еще выполнить зеркальное отражение относительно плоскости $O'x'y'$ получившейся системы координат.

§ 25. Полярные координаты

Декартовы системы координат – не единственный способ определять положение точки с помощью чисел и тем самым применять числовые расчеты для решения геометрических задач. Для этой цели используются и другие типы координатных систем. Опишем некоторые из них.

Полярные координаты на плоскости. Полярная система координат на плоскости состоит из точки O плоскости и исходящего из нее луча l. Точка O называется *полюсом*, луч l — *полярной осью*. Обозначение: $\{O; l\}$. Задание полярной системы координат позволяет однозначно определить положение любой точки плоскости с помощью двух чисел (рис. 1):

1) расстояния r от точки M до полюса O

и, если $M \neq O$,

2) угла φ между лучом $[OM)$ и полярной осью l (угол отсчитывается от оси l против часовой стрелки).

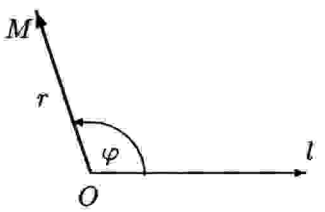


Рис. 1

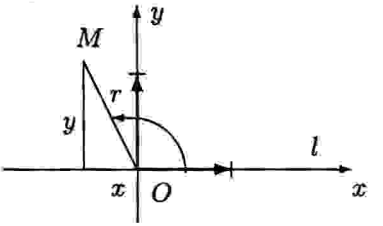


Рис. 2

Число r называется *полярным радиусом* точки M, а угол φ — *полярным углом*. Упорядоченная пара чисел (r, φ) называется *полярными координатами* точки M. Обозначение: $M(r, \varphi)$.

Из определения следует, что:

1) $r \geq 0$ для любой точки M плоскости и $r = 0 \iff M = O$;

2) $0 \leq \varphi < 2\pi$ для любой точки плоскости, кроме полюса, а для полюса угол φ не определен;

3) любая точка плоскости, отличная от полюса, имеет полярные координаты, при этом две точки плоскости совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их полярные координаты.

С каждой полярной системой координат связана некоторая прямоугольная декартова система координат. В этой системе (рис. 2) начало совпадает с полюсом, положительная полуось абсцисс – с полярной осью, положительная полуось ординат получается вращением полярной оси на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Полученную таким образом систему координат Oxy называют *системой координат, определенной полярной системой координат* $\{O; l\}$. Очевидно, что такое соответствие между полярными и прямоугольными системами координат биективно.

Как легко видеть из рис. 2, прямоугольные координаты (x, y) точки M и ее полярные координаты (r, φ) связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{25.1}$$

Полярные координаты в пространстве. Обобщением полярной системы координат в пространстве являются цилиндрические и сферические системы координат.

Пусть в пространстве заданы плоскость π и перпендикулярная к ней ось Oz. Пусть O – точка пересечения оси Oz и плоскости π.

И та и другая система координат состоят из полярной системы координат $\{O; l\}$ плоскости π и оси Oz. Обозначение: $\{O; l; z\}$. Точка O называется *полюсом*, ось l – *полярной осью*, ось Oz – *зенитной осью*.

Цилиндрическими координатами точки M, не лежащей на зенитной оси, называется упорядоченная тройка чисел (r, φ, z), где (r, φ) – полярные координаты ортогональной проекции P точки M на плоскость π, z – координата на зенитной оси ортогональной проекции Q точки M на зенитную ось (рис. 3). Для точек зенитной оси $r = 0$ и угол φ не определен.

Сферическими координатами точки M, не лежащей на зенитной оси, называется (рис. 3) упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, θ), где ρ – расстояние от точки M до полюса O, θ – угол между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительной полуосью Oz (отсчитываемый от $\overrightarrow{OM}$ против часовой стрелки, если смотреть из полярной оси), φ – полярный угол точки P. При этом φ называется *долготой* точки M, θ – *широтой*, ρ – *радиусом*. Долгота не определена для всех точек зенитной оси, широта не определена для полюса.

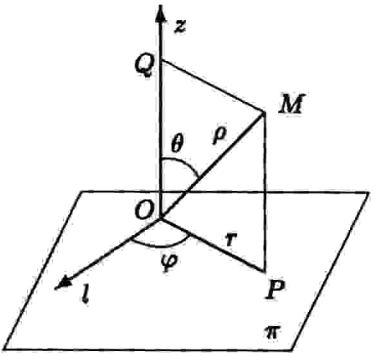


Рис. 3

Глава VI. Системы линейных алгебраических уравнений

§ 26. Постановка задачи

Терминология. *Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{26.1}$$

где a_{ij}, b_i $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ – заданные вещественные числа, а $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные величины. Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а b_i – *свободными членами*.

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ называется *решением системы*, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения. Система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения.

Исследовать и решить систему – это значит:

- установить, совместна ли она или несовместна;
- если она совместна, установить, является ли она определенной или неопределенной, при этом:

– в случае определенной системы найти единственное ее решение;

– в случае неопределенной системы описать множество всех ее решений.

Компактная запись системы. Коэффициенты системы образуют матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, называемую *основной матрицей системы*, свободные члены образуют столбец $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, называемый *столбцом свободных членов*, а неизвестные – столбец $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, называемый *столбцом неизвестных*. В этих обозначениях система (26.1) может быть записана в виде

$$Ax = b \tag{26.2}$$

или

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b, \tag{26.3}$$

где a_i $(i = \overline{1,n})$ – столбцы матрицы A.

В записи (26.3) система уравнений приобретает новый смысл: совместность системы равносильна тому, что столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы A, причем коэффициентами линейной комбинации служат компоненты $x_1, \ldots, x_n$ решения.

Эквивалентность систем. Две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема 26.1. *Умножение обеих частей системы $Ax = b$ слева на невырожденную матрицу приводит ее к эквивалентной системе.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $|Q| \neq 0$. Рассматриваемые системы имеют вид $Ax = b$ и $QAx = Qb$. Если $c \in \mathbb{R}^n$ – решение первой системы, то $Ac \equiv b$ и, следовательно, $QAc \equiv Qb$, откуда следует, что c – решение второй системы. С другой стороны, если c – решение второй системы, то $QAc \equiv Qb$. Умножив обе части этого тождества слева на Q^{-1}, получаем тождество $Ac \equiv b$, откуда следует, что c – решение первой системы. ■

§ 27. Системы с квадратной невырожденной матрицей. Правило Крамера

Прежде чем рассматривать системы общего вида, исследуем простейший класс систем (26.2), когда число уравнений совпадает с числом неизвестных и $|A| \neq 0$.

Теорема 27.1. *Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.*

Доказательство. В силу невырожденности матрицы A для нее существует обратная матрица A^{-1}. Непосредственной проверкой легко установить, что вектор

$$x = A^{-1}b \tag{27.1}$$

является решением системы (26.2). Это решение единственно, так как если y – другое решение системы (26.2), то $Ax \equiv Ay$. Умножив обе части этого тождества слева на A^{-1}, получим, что $x = y$. ■

Решение (27.1) может быть записано покомпонентно, если воспользоваться явным выражением (5.3) для обратной матрицы. Действительно, $x = \frac{1}{|A|}\widehat{A}b$ или, в соответствии с (5.1),

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{|A|}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Эти соотношения в свете свойств определителя означают, что

$$x_i = |A_i|/|A|\,, \quad i = \overline{1,n}, \tag{27.2}$$

где A_i получается из матрицы A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы (27.2) называются *правилом Крамера.*

Замечание. Правило Крамера дает решение системы в явном виде и в некотором смысле носит алгоритмический характер. Однако это правило полезно лишь в теоретических исследованиях и противопоказано для практического использования в приложениях. В самом деле, для решения систем n-го порядка по правилу Крамера требуется вычислить $(n+1)$ определителей n-го порядка, тогда как большинство современных методов решения систем по объему вычислений равносильны вычислению одного определителя. В § 29 мы приведем описание одного из таких методов – метода Гаусса.

Продолжим теоретическое исследование систем, так как вопрос о решении систем с прямоугольной матрицей или квадратной, но вырожденной матрицей остается открытым.

§ 28. Системы общего вида

Совместность системы. Пусть теперь

$$Ax = b \tag{28.1}$$

– система общего вида и $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Исследование системы следует начать с вопроса о ее совместности. Для этой цели составим матрицу B, приписав к матрице A столбец свободных членов:

$$B = [A|b].$$

Матрица B называется *расширенной матрицей* системы (28.1).

Теорема 28.1 (теорема Кронекера–Капелли). *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (28.1) совместна. Тогда из (26.3) следует, что существуют числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ такие, что $b = x_1a_1 + \ldots + x_na_n$. Следовательно, столбец b является линейной комбинацией столбцов $a_1, \ldots, a_n$ матрицы A. Из теоремы 16.8 следует, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$. Возьмем в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так как $\operatorname{rg} B = r$, то он же будет базисным минором и матрицы B. Тогда согласно теореме 16.1 о базисном миноре последний столбец матрицы B будет линейной комбинацией базисных столбцов, т.е. столбцов матрицы A. Следовательно, столбец свободных членов системы является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Это означает совместность системы. ■

Схема исследования совместной системы. Теорема Кронекера–Капелли устанавливает совместность системы. Перейдем к исследованию совместной системы. Итак, пусть система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r + a_{m,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

совместна и $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (28.2)$$

Рассмотрим укороченную систему из первых r уравнений системы $(*)$, т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad (**)$$

Теорема 28.2. *Укороченная система эквивалентна исходной системе:* $(*) \sim (**)$.

Доказательство. Обе системы содержат одинаковое число неизвестных. Очевидно, что любое решение системы $(*)$ является решением системы $(**)$. Покажем, что верно и обратное. Действительно, в расширенной матрице B системы $(*)$ первые r строк являются базисными. Следовательно, все остальные строки согласно теореме о базисном миноре будут линейными комбинациями этих строк. Это означает, что каждое уравнение системы $(*)$, начиная с $(r+1)$-го, будет линейной комбинацией (т.е. следствием) первых r уравнений этой системы. Отсюда вытекает, что каждое решение первых r уравнений системы $(*)$ обращает в тождества все последующие уравнения этой системы. ■

Итак, задача исследования системы $(*)$ упрощена, теперь достаточно изучить укороченную систему $(**)$. Перейдем к этой задаче.

Если $r = n$, то система $(**)$ имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей (§27).

Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, назовем *главными*, а остальные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – *свободными*.

Запишем систему $(**)$ в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r,r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (28.3)$$

Придав свободным неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ произвольные значения $c_{r+1}, \ldots, c_n$, получим систему уравнений относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_r$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r,r+1} - \ldots - a_{rn}c_n \end{cases} \qquad (***)$$

с квадратной невырожденной (согласно (28.2)) матрицей. Эта система имеет (§27) единственное решение $c_1, \ldots, c_r$. Очевидно, что совокупность $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ является решением системы (**).

Теорема 28.3. *Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных из системы (***), можно получить все решения системы (**).*

Доказательство. Пусть $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ – произвольное решение системы (**). Покажем, что оно может быть получено указанным путем. Возьмем числа $c_{r+1}, \ldots, c_n$ в качестве значений для свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ и будем вычислять значения главных неизвестных, решая систему (***). Так как $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ – решение системы (**), то $(c_1, \ldots, c_r)$ – решение системы (***). Но система (***) имеет единственное решение, следовательно, в качестве значений главных неизвестных мы можем получить только числа $(c_1, \ldots, c_r)$. ■

Итак, мы нашли правило, которое позволяет получить любое решение системы (**), а следовательно, и произвольной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 28.4. *Система алгебраических уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$.

Доказательство теоремы фактически содержится в описанном выше правиле для получения решения системы. Действительно, если $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$, то, как указано выше, система имеет единственное решение. Если же $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B < n$, то среди неизвестных будет хотя бы одно свободное неизвестное. Придавая ему произвольные значения, получим бесконечно много решений системы. ■

Общее решение системы. Как указывалось в §26, решить систему – значит описать множество всех ее решений. В случае определенной системы для этого достаточно найти то единственное решение, которым она обладает. В случае же неопределенной системы необходимо найти способ, позволяющий описать бесконечное множество ее решений. Один из таких способов состоит в следующем.

Решим систему (28.3) относительно главных неизвестных:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_r &= f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n), \end{aligned} \qquad (28.4)$$

где $f_1, \ldots, f_r$ – некоторые однозначно (в силу теоремы 27.1) определяемые из (28.3) функции.

Соотношения (28.4) при произвольных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением си-*

стемы. В отличие от общего, конкретное решение $x = (c_1, \ldots, c_n)^T$, где c_i, $i = \overline{1,n}$, – известные числа, называется *частным решением.*

Однородные системы. Система линейных алгебраических уравнений с нулевой правой частью называется *однородной.*

Все результаты общей теории справедливы и для этого частного случая, однако здесь имеет место некоторая специфика, на которой мы остановимся подробнее. Из теоремы Кронекера–Капелли следует, что однородная система

$$Ax = 0 \tag{28.5}$$

всегда совместна, так как ранг расширенной матрицы $[A|0]$, очевидно, равен рангу матрицы A. Впрочем, это видно и непосредственно: однородная система заведомо имеет решение $(0, \ldots, 0)^T$, называемое *тривиальным.* Согласно общей теории для однородных систем имеют место следующие теоремы.

Теорема 28.5. *Однородная система* (28.5) *с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rg} A < n$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 28.4, так как наличие нетривиального решения для однородной системы равносильно ее неопределенности. ■

Теорема 28.6. *Однородная система* (28.5) *с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $|A| = 0$.

§ 29. Метод Гаусса исследования и решения систем

В соответствии с общими принципами метода Гаусса решения матричных задач (§4) укажем тип простейших систем линейных уравнений, тип эквивалентных преобразований системы, а также покажем, что произвольная система линейных алгебраических уравнений указанными преобразованиями приводится к указанному типу.

Системы с трапециевидной матрицей. Пусть

$$Ax = b \tag{29.1}$$

– система с верхней трапециевидной матрицей A. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \ldots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m \end{array}\right], \tag{29.2}$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,r}$.

Мы не случайно выбрали системы с верхней трапециевидной матрицей. Для таких систем чрезвычайно просто устанавливается совместность и достаточно просто находится решение.

Теорема 29.1. *Система* (29.1) *с верхней трапециевидной матрицей совместна тогда и только тогда, когда* $b_k = 0$ *при* $k > r$.

Доказательство. Действительно, ранг трапециевидной матрицы A равен числу ненулевых строк, так как минор r-го порядка, расположенный в левом верхнем углу, отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка содержат нулевые строки и поэтому равны нулю. Ранг расширенной матрицы (29.2) равен r тогда и только тогда, когда $b_k = 0$, $k = \overline{r+1, n}$, так как наличие хотя бы одного ненулевого элемента b_i, где $r < i \leq m$, означает наличие ненулевого минора $(r+1)$-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_i \end{vmatrix}.$$

Отсюда на основании теоремы Кронекера–Капелли следует утверждение теоремы. ■

Итак, совместность системы с верхней трапециевидной матрицей устанавливается чисто "визуально".

Пусть теперь система (29.1) совместна. Реализация всех пунктов общей теории исследования и решения совместной системы (§28) для системы (29.1) также проста.

1°. В качестве базисного минора матрицы A всегда можно взять минор, расположенный в левом верхнем углу.

2°. Укороченная система состоит из первых r уравнений.

3°. Если $r = n$, то система (29.1) станет системой с треугольной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{rr}x_r = b_r, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение (§27); найти его не представляет труда: решая последовательно уравнения системы снизу вверх, мы каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

4°. Если $r < n$, то неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ будут свободными и система относительно главных неизвестных примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{29.3}$$

Общее и частное решения исходной системы находятся из системы (29.3) с треугольной матрицей.

Элементарные преобразования системы уравнений. *Элементарными преобразованиями системы уравнений* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка местами двух уравнений системы;

2) умножение какого-либо уравнения системы на число $\alpha \neq 0$;

3) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число β.

Теорема 29.2. *Элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений приводят ее к эквивалентной системе.*

Доказательство. Элементарные преобразования системы уравнений означают элементарные преобразования строк расширенной матрицы B, которые, как известно (§3), равносильны умножению матрицы B слева на матрицы элементарных преобразований. Это, в свою очередь, согласно трактовке (2.3) операции умножения матриц равносильно умножению слева обеих частей системы уравнений на невырожденные матрицы элементарных преобразований, что приводит к эквивалентной системе (теорема 26.1). ■

Замечание 1. Рассматриваемые в теореме преобразования относятся *только к строкам* расширенной матрицы. Очевидно, что элементарные преобразования столбцов расширенной матрицы, вообще говоря, лишены смысла. Однако можно рассматривать элементарные преобразования столбцов основной матрицы A, в частности перестановки ее столбцов, которые означают перенумерацию неизвестных системы.

Приведение системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей. Как следует из теоремы 3.1 (и замечания 1 к ней), матрица A системы уравнений (28.1) общего вида элементарными преобразованиями строк и перестановками столбцов приводится к верхней трапециевидной форме (1.3). Если используемые при этом элементарные преобразования строк матрицы A применить к строкам всей расширенной матрицы B, то на основании теоремы 29.2 (и замечания к ней) мы придем к такой системе с верхней трапециевидной матрицей, решения которой отличаются от решений исходной системы только нумерацией неизвестных. *Метод Гаусса* исследования и решения системы уравнений состоит в приведении ее к системе с верхней трапециевидной матрицей, а затем в исследовании и решении полученной системы. При этом, если в процессе преобразования использовались перестановки столбцов основной матрицы A, то в полученных решениях необходимо восстановить исходную нумерацию неизвестных.

Процесс приведения системы к системе с трапециевидной матрицей называется *прямым ходом* метода Гаусса, а процесс решения системы с треугольной матрицей – *обратным ходом*.

По объему вычислений обратный ход оказывается несущественным в методе Гаусса, так как он требует выполнения $O(n^2)$ операций умножения, тогда как для прямого хода требуется выполнить $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ умножений (§4). Таким образом,

метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений по объему вычислений равносилен вычислению одного определителя (см. §27, замечание).

Замечание 2. В основе метода Гаусса вычисления определителя, вычисления ранга матрицы и решения системы линейных алгебраических уравнений лежит один и тот же алгоритм – основной процесс приведения матрицы к ступенчатой форме. Однако, как отмечалось в §4, 16, 29, реализация этого алгоритма для каждой из этих задач имеет свою специфику. Наиболее "свободно" он реализуется для задачи вычисления ранга матрицы, так как любые элементарные преобразования и строк, и столбцов матрицы не изменяют ее ранга. В задаче вычисления определителя по-прежнему допускаются преобразования как строк, так и столбцов, но уже необходимо следить за изменением определителя, если в преобразованиях участвовали перестановки строк (или столбцов) или умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$. Аккуратнее следует относиться к задаче решения систем уравнений, где допускаются преобразования *только строк расширенной матрицы* и *перестановки столбцов только основной матрицы*.

§ 30. Геометрические свойства решений системы

Рассмотрим свойства решений системы линейных уравнений с точки зрения теории линейного пространства.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{30.1}$$

с матрицей $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Каждое решение этой системы можно рассматривать как вектор арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Совокупность всех решений системы (30.1) образует некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Выясним, какими свойствами оно обладает.

Линейное подпространство решений однородной системы.

Теорема 30.1. *Множество всех решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными является линейным подпространством арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Обозначим $L = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$. Легко проверить, что если $x \in L$, $y \in L$, то $x + y \in L$, и, кроме того, если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha x \in L$. В силу теоремы 18.1 отсюда следует, что L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. ■

Эта теорема позволяет "нарисовать" множество решений однородной системы, так как геометрическим образом линейного подпространства являются (§18) прямая и плоскость, проходящие через начало координат.

Произвольный базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений*. Понятно, что фундаментальная система решений существует лишь в том случае, когда однородная система имеет нетривиальное решение. При этом система уравнений может обладать многими фундаментальными системами решений. Однако все эти системы состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых решений однородной системы. Определим это число.

Теорема 30.2. *Размерность пространства решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными равна $n - r$, где $r = \operatorname{rg} A$.*

Доказательство. Построим фундаментальную систему решений. Для этого воспользуемся аппаратом свободных неизвестных. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ – главные неизвестные. Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ следующие $n-r$ наборов решений: $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,1)$. Для каждого из этих наборов найдем соответствующие значения главных неизвестных. Тем самым найдем $n-r$ решений системы:

$$\begin{array}{lcl} e_1 & = & (c_{11}, \quad c_{12}, \quad \ldots, \quad c_{1r}, \quad 1,0,\ldots,0)^T, \\ e_2 & = & (c_{21}, \quad c_{22}, \quad \ldots, \quad c_{2r}, \quad 0,1,\ldots,0)^T, \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \cdots, \quad c_{n-r,r}, \quad 0,0,\ldots,1)^T. \end{array} \tag{30.2}$$

Решения $e_1, \ldots, e_{n-r}$ обладают следующими свойствами.

1. Решения $e_1, \ldots, e_{n-r}$ линейно независимы, так как матрица

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,1} & c_{n-r,2} & \ldots & c_{n-r,r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right]$$

имеет ранг, равный $n-r$ (она содержит минор $(n-r)$-го порядка, отличный от нуля), а ранг матрицы согласно теореме 16.3 равен максимальному числу линейно независимых строк.

2. Любое решение $x = (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)^T$ является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_{n-r}$, и, более того,

$$x = x_{r+1}e_1 + \ldots + x_n e_{n-r}. \tag{30.3}$$

Действительно, обозначим $y = x - x_{r+1}e_1 - \ldots - x_n e_{n-r}$. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Очевидно, что y – решение системы. Найдем его, пользуясь общей теорией решения систем: придадим свободным неизвестным значения $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Пользуясь соотношением (30.2), легко показать, что $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$. Следовательно, укороченная система будет однородной системой, имеющей единственное и, очевидно, тривиальное решение $y_1 = \ldots = y_r = 0$. Таким образом, $y = 0$. Отсюда вытекает (30.3). Из свойств 1 и 2 следует, что $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – фундаментальная система решений. ■

Построенная фундаментальная система решений называется *нормальной фундаментальной системой решений*. Общий принцип построения фундаментальной системы решений следует из теоремы 30.2: так как размерность пространства решений однородной системы равна $n-r$, то для построения фундаментальной системы решений достаточно найти любые $n-r$ линейно независимых решений (§ 17, утверждение 1). Для этого достаточно свободным неизвестным придать $n-r$ линейно независимых наборов значений, т.е. наборов вида

$(c_{1,r+1},\dots,c_{1n}),\ \dots,\ (c_{n-r,r+1},\dots,c_{n-r,n})$, для которых

$$\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-r,r+1} & \dots & c_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{30.4}$$

Если для каждого из этих наборов найти соответствующие значения главных неизвестных, то получим $n-r$ решений системы:

$$e_1 = (c_{11}, \dots, c_{1r}, c_{1,r+1}, \dots, c_{1n})^T,$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$e_{n-r} = (c_{n-r,1}, \dots, c_{n-r,r}, c_{n-r,r+1}, \dots, c_{n-r,n})^T,$$

линейно независимых вследствие (30.4).

Общее решение однородной системы. Фундаментальная система решений $e_1,\dots,e_{n-r}$ однородной системы линейных уравнений позволяет записать любое решение системы в общем виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-r} e_{n-r},\ \forall \alpha_1,\dots,\alpha_{n-r} \in \mathbb{R}. \tag{30.5}$$

Представление (30.5) решения называется *общим решением однородной системы* уравнений *через фундаментальную систему решений* (в отличие от общего решения (28.4) через свободные неизвестные).

Линейное многообразие решений неоднородной системы. Пусть

$$Ax = b \tag{30.6}$$

– неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Однородная система

$$Ax = 0, \tag{30.7}$$

полученная из системы (30.6) заменой свободных членов нулями, называется *приведенной однородной* системой для системы (30.6).

Между решениями обеих систем существует тесная связь. Легко проверить следующие факты.

1°. *Сумма решений неоднородной и приведенной однородной систем является решением неоднородной системы.*

2°. *Разность двух решений неоднородной системы является решением приведенной однородной системы.*

Теорема 30.3. *Множество всех решений неоднородной системы является линейным многообразием, полученным сдвигом подпространства решений приведенной однородной системы на частное решение неоднородной системы.*

Доказательство. Пусть H – множество всех решений неоднородной системы (30.6), c – частное его решение и L – множество всех решений приведенной системы (30.7). Покажем, что $H = c + L$. Действительно, если $z \in H$, то $z = c + (z - c) = c + x$, где $x = z - c$. Так как $x \in L$ (как разность двух решений системы (30.6)), то $z \in c + L$ и, следовательно, $H \subset c + L$. С другой стороны, если $z \in c + L$, то

$z = c + x$, $x \in L$. Значит, $z \in H$ как сумма решений неоднородной и приведенной систем. Следовательно, $c + L \subset H$ и $H = c + L$. ■

Общее решение неоднородной системы. Итак, найдя одно (частное) решение неоднородной системы и прибавляя его к каждому решению приведенной системы, можно получить все решения неоднородной системы. В силу (30.5) это позволяет записать решение неоднородной системы в общем виде следующим образом:

$$z = c + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}, \tag{30.8}$$

где c – частное решение системы (30.6), а $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – фундаментальная система решений системы (30.7). Представление (30.8) решения называется *общим решением неоднородной* системы уравнений *через фундаментальную систему решений*. Итак, общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения приведенной однородной системы.

Замечание. В соответствии с теоремой 30.3 геометрическим образом множества всех решений неоднородной системы уравнений служат прямая и плоскость, не проходящие через начало координат (§18).

Глава VII. Алгебраические линии и поверхности первого порядка

§ 31. Понятие об уравнениях линии и поверхности

Пусть Oxy и $Oxyz$ – аффинные системы координат на плоскости и в пространстве. Уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{31.1}$$

соответственно

$$F(x, y, z) = 0, \tag{31.2}$$

называется *уравнением линии* $\mathcal{L}$ *на плоскости* (*поверхности* π *в пространстве*) в заданной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек линии $\mathcal{L}$ (поверхности π), и только они. Очевидно, что два уравнения в заданной системе координат определяют одну и ту же линию (поверхность) тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Алгебраическим одночленом относительно переменных x, y (соответственно x, y, z) с вещественным коэффициентом λ называется выражение

$$\lambda x^p y^q \qquad (\lambda x^p y^q z^r), \tag{31.3}$$

где p, q, r – целые неотрицательные числа. Если $\lambda \neq 0$, то число $p + q$ (соответственно $p + q + r$) называется *степенью одночлена*. *Алгебраическим многочленом* относительно переменных x, y (x, y, z) с вещественными коэффициентами называется конечная сумма алгебраических одночленов (31.3). Наибольшая степень одночленов, входящих в многочлен, называется *степенью многочлена*.

Линия на плоскости (поверхность в пространстве) называется *алгебраической*, если в некоторой аффинной системе координат она определяется уравнением (31.1) (соответственно (31.2)), где $F(x, y)$ (соответственно $F(x, y, z)$) – алгебраический многочлен от переменных x, y (x, y, z) с вещественными коэффициентами. Степень многочлена $F(x, y)$ (соответственно $F(x, y, z)$) называется *порядком линии (поверхности)*.

Корректность этого определения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 31.1 (об инвариантности порядка). *При переходе от одной аффинной системы координат к другой алгебраическая линия (поверхность) остается алгебраической и порядок ее не изменяется.*

Доказательство проведем для линии. Пусть на плоскости в аффинной системе координат Oxy линия $\mathcal{L}$ определяется уравнением (31.1), где $F(x, y)$ – алгебраический многочлен степени n. При переходе к новой системе координат $O'x'y'$ уравнение (31.1) преобразуется в уравнение $F'(x', y') = 0$. Покажем, что $F'(x', y')$ – тоже алгебраический многочлен и его степень $n' = n$. Для этого в каждый одночлен $\lambda x^p y^q$ многочлена $F(x, y)$ вместо x и y подставим их выражения через x', y' согласно формулам преобразования координат (§24). Тогда $\lambda x^p y^q = \lambda(c_{11}x' + c_{12}y' + \alpha)^p(c_{21}x' + c_{22}y' + \beta)^q$. Следовательно, одночлен $\lambda x^p y^q$ преобразуется в алгебраический многочлен от переменных x', y', степень которого не превосходит $p + q$. При этом многочлен $F(x, y)$ преобразуется в алгебраический многочлен $F'(x', y')$, степень которого $n' \leq n$. Если в этих рассуждениях поменять ролями системы координат, то получим, что $n \leq n'$, т.е. $n' = n$. ■

§ 32. Уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве

Этот и несколько следующих параграфов посвящены прямой на плоскости и плоскости в пространстве. Мы будем изучать эти понятия одновременно, так как у них много общего. И это понятно, ведь и прямая на плоскости, и плоскость в пространстве представляют собой один и тот же объект в линейном пространстве, называемый гиперплоскостью (§18). В тех случаях, когда сходные теоремы имеют, по существу, одинаковые доказательства, мы будем доказывать только одну из них.

В этом параграфе рассматриваются различные типы уравнений прямой на плоскости (плоскости в пространстве), каждый тип уравнения определяется тем геометрическим заданием, которое однозначно определяет прямую (плоскость).

Канонические уравнения. Ненулевой вектор, коллинеарный прямой, называется ее *направляющим вектором*. Из аксиом геометрии следует, что через любую точку проходит единственная прямая с заданным направляющим вектором.

Пусть прямая l с направляющим вектором $\mathbf{a}$ проходит через точку M_0. Очевидно, точка M лежит на прямой l (рис. 1) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т.е. линейно зависимы (§15). С учетом условия $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ это равносильно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно

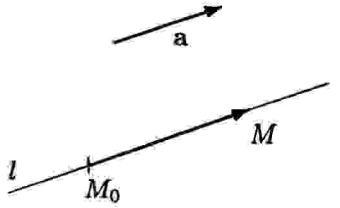


Рис. 1

выражается через вектор $\mathbf{a}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\,\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{32.1}$$

Таким образом, условию (32.1) удовлетворяют все точки M прямой l, и только они.

Теорема 32.1. *На плоскости в аффинной системе координат Oxy уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a} = \{m, n\}$ имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{32.2}$$

или

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{32.3}$$

Доказательство. Пусть точка M имеет координаты (x, y), тогда $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Условие (32.1) в силу линейности координат означает, что в определителе (32.2) первая строка линейно выражается через вторую, а это равносильно равенству (32.2). Итак, уравнению (32.2) удовлетворяют координаты (x, y) всех точек прямой l, и только они. Равенство нулю определителя второго порядка равносильно пропорциональности его строк, т.е. условию (32.3). ■

Замечание 1. Уравнение (32.3) означает лишь пропорциональность и в случае, когда $m = 0$ или $n = 0$, оно равносильно уравнению $x - x_0 = 0$ или $y - y_0 = 0$ соответственно.

Уравнения (32.2), (32.3) называются *каноническими уравнениями прямой на плоскости.*

Следствие 1. *Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это следует из того, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является направляющим вектором прямой.

Без принципиальных изменений может быть получено аналогичное уравнение плоскости в пространстве. Два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, называются ее *направляющими векторами.* Из аксиом геометрии следует, что через любую точку проходит единственная плоскость с заданными направляющими векторами.

Пусть плоскость π с направляющими векторами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ проходит через точку M_0. Очевидно, точка M лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда (рис. 2) векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ компланарны, т.е. линейно зависимы (§15).

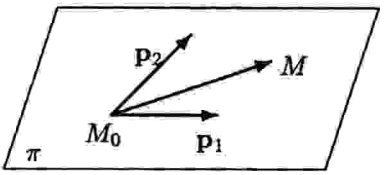


Рис. 2

С учетом условия неколлинеарности векторов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ это равносильно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно выражается через $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$:

$$\overrightarrow{M_0M} = u\,\mathbf{p}_1 + v\,\mathbf{p}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{32.4}$$

Теорема 32.2. *В пространстве в аффинной системе координат $Oxyz$ уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющими векторами $\mathbf{p}_1 = \{m_1, n_1, k_1\}$ и $\mathbf{p}_2 = \{m_2, n_2, k_2\}$ имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{32.5}$$

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 32.1.

Уравнение (32.5) называется *каноническим уравнением плоскости.*

Следствие 2. *Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Параметрические уравнения. Этот тип уравнений представляет собой другую форму записи условий (32.1) и (32.4). Пусть $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ – радиус-векторы точек M и M_0 относительно полюса O. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и условие (32.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{32.6}$$

или, в координатной форме, в системе координат Oxy:

$$\begin{cases} x &= x_0 + tm, \\ y &= y_0 + tn, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{32.7}$$

Уравнения (32.6), (32.7) называются *параметрическими уравнениями прямой* на плоскости в векторной и координатной формах.

Замечание 2. Число t является координатой точки M на прямой l в системе координат $\{M_0,\ \mathbf{a}\}$.

Аналогично условие (32.4) может быть записано в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{p}_1 + v\,\mathbf{p}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}, \tag{32.8}$$

или, в координатной форме, в системе координат $Oxyz$:

$$\begin{cases} x &= x_0 + um_1 + vm_2, \\ y &= y_0 + un_1 + vn_2, \\ z &= z_0 + uk_1 + vk_2, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{32.9}$$

Уравнения (32.8), (32.9) называются *параметрическими уравнениями плоскости* в векторной и координатной формах.

Замечание 3. Числа u, v являются плоскостными координатами точки M плоскости π в системе координат $\{M_0;\ \mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2\}$.

Общие уравнения.

Теорема 32.3. *Линия на плоскости является прямой тогда и только тогда, когда она представляет собой алгебраическую линию первого порядка.*

Доказательство. Необходимость. Пусть l – прямая на плоскости, проходящая через точку M_0 и параллельная ненулевому вектору $\mathbf{a}$. Пусть Oxy – произвольная аффинная система координат и $\mathbf{a} = \{m, n\}$, $M_0(x_0, y_0)$. Тогда прямая l описывается каноническим уравнением (32.2) или, что то же самое, уравнением $n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$, которое, если положить $A = n$, $B = -m$, $C = -nx_0 + my_0$, может быть записано в виде

$$Ax + By + C = 0. \tag{32.10}$$

Так как вектор $\mathbf{a} = \{m, n\} \neq \mathbf{0}$, то по крайней мере один из коэффициентов A или B отличен от нуля. Поэтому левая часть уравнения (32.10) представляет собой алгебраический многочлен первой степени. Следовательно, любая прямая на плоскости является алгебраической линией первого порядка.

Достаточность. Пусть в аффинной системе координат Oxy линия l определяется уравнением (32.10). Это уравнение имеет частное решение $x_0 = -\dfrac{AC}{A^2 + B^2}$, $y_0 = -\dfrac{BC}{A^2 + B^2}$, ибо $Ax_0 + By_0 + C \equiv 0$.

Вычитая последнее равенство из (32.10), получим, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ или, что то же самое,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0.$$

В силу теоремы 32.1 это уравнение определяет прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a} = \{-B, A\}$. ■

Уравнение (32.10) называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ называется *вектором нормали к прямой относительно уравнения* (32.10).

Теорема 32.4. *Поверхность в пространстве является плоскостью тогда и только тогда, когда она представляет собой алгебраическую поверхность первого порядка.*

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 32.3 с той лишь разницей, что уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{где} \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \tag{32.11}$$

$$x_0 = -\frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y_0 = -\frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad z_0 = -\frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2},$$

а уравнение (32.11) может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0, \quad \text{если} \quad A \neq 0$$

(случаи $B \neq 0$ и $C \neq 0$ рассматриваются аналогично). ■

Уравнение (32.11) называется *общим уравнением плоскости* в пространстве. Вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ называется *вектором нормали к плоскости относительно уравнения* (32.11).

Общее уравнение прямой (плоскости) называется *полным*, если все коэффициенты A, B, C (соответственно A, B, C, D) отличны от нуля.

Теорема 32.5. *В аффинной системе координат Oxy на плоскости ($Oxyz$ в пространстве) вектор $\mathbf{a} = \{m, n\}$ (соответственно $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$) параллелен прямой (плоскости), заданной общим уравнением* (32.10) *(соответственно* (32.11)*), тогда и только тогда, когда*

$$Am + Bn = 0, \tag{32.12}$$

соответственно

$$Am + Bn + Ck = 0. \tag{32.13}$$

Доказательство (для прямой). Как следует из доказательства теоремы 32.3, вектор $\mathbf{b} = \{-B, A\}$ является направляющим вектором прямой. Это означает, что вектор $\mathbf{a}$ параллелен этой прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}$ коллинеарен $\mathbf{b}$, т.е. когда $\begin{vmatrix} m & n \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$ или, что то же самое, $Am + Bn = 0$. ■

Замечание 4. Левые части условий (32.12), (32.13) можно рассматривать как скалярные произведения вектора нормали $\mathbf{n}$ и вектора $\mathbf{a}$ в ортонормированном базисе. Таким образом, в *прямоугольной декартовой системе координат вектор нормали* $\mathbf{n} = \{A, B\}$ к

прямой (32.10) *(соответственно* $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ *к плоскости* (32.11)) *перпендикулярен этой прямой (плоскости).*

Уравнения в отрезках. Полные уравнения (32.10) и (32.11) прямой на плоскости и плоскости в пространстве могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Полагая $a = -C/A$, $b = -C/B$ (для прямой) и $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ (для плоскости), получим эквивалентные уравнения

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

называемые *уравнениями* прямой и соответственно плоскости *в отрезках*. Числа a, b, c в этих уравнениях имеют простой геометрический смысл (рис. 3): они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая (плоскость) на осях координат.

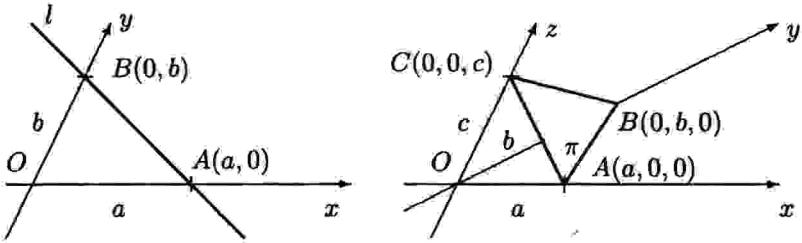


Рис. 3

Векторные уравнения. 1. Параметрическое уравнение (32.6) представляет собой векторное уравнение прямой на плоскости через направляющий вектор.

Аналогично параметрическое уравнение (32.8) представляет собой векторное уравнение плоскости в пространстве через направляющие векторы. Оно порождает другие формы векторных уравнений плоскости. В самом деле, это уравнение означает компланарность векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, что согласно критерию компланарности (теорема 23.4) равносильно равенству

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0 \tag{32.14}$$

или, в силу линейности смешанного произведения,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = D, \tag{32.15}$$

где D – константа, равная $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$.

Уравнения (32.14), (32.15) представляют собой векторные уравнения плоскости через смешанное произведение.

2. Из аксиом геометрии следует, что на плоскости (в пространстве) через заданную точку проходит единственная прямая (соответственно плоскость), перпендикулярная заданному вектору.

Теорема 32.6. *Уравнение прямой на плоскости (плоскости в пространстве), проходящей через точку* $M_0(\mathbf{r}_0)$ *перпендикулярно вектору* $\mathbf{n}$, *имеет вид*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \tag{32.16}$$

или, что то же самое,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \tag{32.17}$$

где D *– константа, равная* $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из того, что точка $M(\mathbf{r})$ лежит на прямой (на плоскости) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{n}$ ортогональны. ■

Уравнения (32.16), (32.17) представляют собой векторные уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве через нормали.

§ 33. Взаимное расположение прямых на плоскости (плоскостей в пространстве)

Взаимное расположение двух прямых (плоскостей). Пусть на плоскости (в пространстве) две прямые (две плоскости) заданы общими уравнениями в аффинной системе координат Oxy ($Oxyz$):

$$l_i:\ A_ix + B_iy + C_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2, \tag{33.1}$$

и соответственно

$$\pi_i:\ A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{33.2}$$

Составим матрицы из коэффициентов этих уравнений:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \tag{33.3}$$

для прямых и

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \tag{33.4}$$

для плоскостей. Очевидно, что в обоих случаях $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 2$, $1 \leq \operatorname{rg} B \leq 2$, $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} B$. Следовательно, для рангов матриц A и B возможны только следующие три набора значений:

$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} B$
1	2
1	1
2	2

(33.5)

Теорема 33.1. *Прямые l_1 и l_2 на плоскости совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \tag{33.6}$$

параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \tag{33.7}$$

пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \tag{33.8}$$

Доказательство. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{33.9}$$

относительно неизвестных x, y. Для этой системы матрицы A и B из (33.3) являются основной и расширенной матрицами соответственно.

Согласно (33.5) эта система совместна только в двух случаях: когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$ и $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$. В случае когда $\operatorname{rg} A = 1$, а $\operatorname{rg} B = 2$, система несовместна. В первом случае решения системы образуют одномерное линейное многообразие (§30), а во втором – нульмерное, т.е. система имеет единственное решение.

Перейдем к прямым l_1 и l_2. Совпадение прямых l_1 и l_2 означает, что решения системы (33.9) образуют одномерное линейное многообразие, т.е. что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$ или, что то же самое, $\operatorname{rg} B = 1$. Это условие равносильно (33.6) в силу теоремы о базисном миноре. Параллельность прямых l_1 и l_2 (и их несовпадение) означает, что система (33.9) несовместна, т.е. что $\operatorname{rg} A = 1$, $\operatorname{rg} B = 2$. Это условие равносильно (33.7). Пересекаемость прямых l_1 и l_2 означает, что система (33.9) имеет единственное решение, т.е. что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$ или, что то же самое, $\operatorname{rg} A = 2$. Это условие равносильно (33.8). ■

Теорема 33.2. *Плоскости π_1 и π_2 совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 *и* A_2, B_2, C_2 *не пропорциональны.*

Доказательство теоремы представляет собой естественный аналог доказательства теоремы 33.1 и не содержит принципиальных отличий. Отметим лишь, что в случае, когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$, решения системы образуют двумерное линейное многообразие (т.е. плоскости π_1 и π_2 совпадают), а в случае, когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$, решения системы образуют одномерное линейное многообразие (т.е. плоскости пересекаются по прямой). ■

Замечание. Теоремам 33.1 и 33.2 можно дать единую формулировку в терминах матриц (33.3) и (33.4): *прямые* l_1 *и* l_2 (*плоскости* π_1 *и* π_2)

совпадают $\iff \operatorname{rg} B = 1$;

параллельны и не совпадают $\iff \operatorname{rg} A = 1$, $\operatorname{rg} B = 2$;

пересекаются $\iff \operatorname{rg} A = 2$.

Пучок прямых (плоскостей). Множество всех прямых плоскости, проходящих через данную точку M_0, называется *пучком прямых* с центром в точке M_0. Обозначение: $\pi(M_0)$. Пусть l_1 и l_2 – две несовпадающие прямые пучка $\pi(M_0)$, заданные уравнениями (33.1) в некоторой аффинной системе координат Oxy. Положим $F_i(x, y) = A_i x + B_i y + C_i$, где $i = 1, 2$.

Теорема 33.3. *Прямая принадлежит пучку* $\pi(M_0)$ *тогда и только тогда, когда она определяется уравнением*

$$\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y) = 0 \tag{33.10}$$

при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *одновременно не равных нулю.*

Доказательство. Достаточность очевидна, так как уравнение (33.10) является в силу условия (33.8) уравнением первой степени и определяет прямую. Она проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, поскольку $F_1(x_0, y_0) = 0$ и $F_2(x_0, y_0) = 0$.

Необходимость. Пусть прямая $l \in \pi(M_0)$. Возьмем на этой прямой точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от точки $M_0(x_0, y_0)$. Положим $\alpha = A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2$, $\beta = -(A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1)$. Поскольку точка M_1 не может одновременно лежать на l_1 и l_2 (ибо прямые l_1 и l_2 не совпадают), то по крайней мере одно из чисел α или β отлично от нуля. Тогда уравнение $\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y) = 0$ согласно условию (33.8) является уравнением первой степени и определяет прямую. Очевидно, она проходит через точки M_0 (так как прямые l_1, l_2 проходят через M_0) и M_1 (согласно выбору α, β). Следовательно, эта прямая совпадает с l. ■

Итак, любая прямая пучка $\pi(M_0)$ определяется двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2 этого пучка. Каждая пара чисел α, β, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, определяет единственную прямую пучка. Уравнение (33.10) называется *уравнением пучка прямых*, проходящих через точку пересечения прямых (33.1).

Множество всех плоскостей пространства, проходящих через прямую l, называется *пучком плоскостей* с осью l. Обозначение: $\pi(l)$. Пусть π_1 и π_2 – две пересекающиеся плоскости пучка $\pi(l)$, заданные уравнениями (33.2) в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$. Положим $F_i(x,y,z) = A_ix + B_iy + C_iz + D_i$, где $i = 1, 2$.

Теорема 33.4. *Плоскость принадлежит пучку $\pi(l)$ тогда и только тогда, когда она определяется уравнением*

$$\alpha F_1(x,y,z) + \beta F_2(x,y,z) = 0 \tag{33.11}$$

при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю.

Доказательство теоремы, по существу, повторяет доказательство теоремы 33.3. Отметим лишь, что в данном случае M_1 – любая точка плоскости, не лежащая на оси l. ■

Уравнение (33.11) называется *уравнением пучка плоскостей*, проходящих через прямую пересечения плоскостей (33.2).

§ 34. Полуплоскости и полупространства

Из аксиом геометрии следует, что каждая прямая l на плоскости разбивает эту плоскость на две полуплоскости, при этом точки M_1 и M_2, не лежащие на прямой l, принадлежат одной полуплоскости, если отрезок $[M_1M_2]$ не имеет общих точек с прямой l, в противном случае точки M_1 и M_2 принадлежат разным полуплоскостям. Выясним, как этот геометрический факт описывается в аналитической форме.

Пусть прямая l в аффинной системе координат Oxy определяется уравнением

$$Ax + By + C = 0. \tag{34.1}$$

Теорема 34.1. *Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат разным полуплоскостям относительно прямой l тогда и только тогда, когда*

$$(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0. \tag{34.2}$$

Доказательство. Предварительно заметим, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является внутренней точкой отрезка $[M_1M_2]$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M_0} = t\overrightarrow{M_1M_2}$, где $0 < t < 1$, т.е.

$$x_0 = (1-t)x_1 + tx_2,\ y_0 = (1-t)y_1 + ty_2, \quad 0 < t < 1.$$

Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат разным полуплоскостям тогда и только тогда, когда существует точка $M_0(x_0, y_0)$, общая для прямой l и отрезка $[M_1M_2]$, причем M_0 является внутренней точкой отрезка $[M_1M_2]$, т.е.

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ x_0 = (1-t)x_1 + tx_2,\ y_0 = (1-t)y_1 + ty_2, \quad 0 < t < 1. \end{cases}$$

С учетом очевидного тождества $C = (1-t)C + tC$ получим, что точки M_1 и M_2 принадлежат разным полуплоскостям тогда и только тогда, когда существует число t такое, что

$$(1-t)(Ax_1 + By_1 + C) + t(Ax_2 + By_2 + C) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

или, в обозначениях $Ax_1 + By_1 + C = F_1$, $Ax_2 + By_2 + C = F_2$,

$$(1-t)F_1 + tF_2 = 0, \qquad 0 < t < 1.$$

Это равносильно тому, что $F_1F_2 < 0$. ■

Итак, для координат (x, y) всех точек одной полуплоскости выполняется неравенство $Ax+By+C > 0$, а другой – неравенство $Ax+By+C < 0$. Полуплоскость, для точек $M(x, y)$ которой $Ax + By + C > 0$, называется *положительной полуплоскостью* относительно уравнения (34.1) прямой l и обозначается символом π_+, а полуплоскость, для точек которой $Ax + By + C < 0$, – *отрицательной полуплоскостью* и обозначается π_-.

Теорема 34.2. *Вектор нормали* $\mathbf{n} = \{A, B\}$ *к прямой* l: $Ax + By + C = 0$, *отложенный от любой точки прямой, направлен в сторону положительной полуплоскости.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка прямой l. Отложим вектор $\mathbf{n}$ от точки M_0, пусть конец вектора $\mathbf{n}$ совпадает с точкой $M_1(x_1, y_1)$. Тогда $\mathbf{n} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\} = \{A, B\}$ и, следовательно, $x_1 = A + x_0$, $y_1 = B + y_0$. Подставив координаты x_1, y_1 точки M_1 в левую часть уравнения прямой l, получаем, что $Ax_1 + By_1 + C = A^2 + B^2 + Ax_0 + By_0 + C = A^2 + B^2 > 0$, так как $Ax_0 + By_0 + C = 0$ и $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. ■

Аналогичные факты имеют место и в пространстве. Плоскость

$$\pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0 \tag{34.3}$$

разбивает пространство на два полупространства.

Теорема 34.3. *Точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *принадлежат разным полупространствам относительно плоскости* π *тогда и только тогда, когда*

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$$

Доказательство теоремы принципиально не отличается от доказательства теоремы 34.1. ■

Полупространство, для точек $M(x, y, z)$ которого $Ax + By + Cz + D > 0$, называется *положительным полупространством* относительно уравнения (34.3) плоскости π, а полупространство, для точек которого $Ax + By + Cz + D < 0$, – *отрицательным полупространством.*

Теорема 34.4. *Вектор нормали* $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ *к плоскости* π: $Ax + By + Cz + D = 0$, *отложенный от любой точки плоскости, направлен в сторону положительного полупространства.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 34.2. ■

§ 35. Прямая на плоскости (плоскость в пространстве) в прямоугольной декартовой системе координат

Рассматривается прямоугольная декартова система координат Oxy на плоскости ($Oxyz$ в пространстве), определенная ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ соответственно). Известно (§32, замечание 2), что вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ (соответственно $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$) перпендикулярен прямой l, заданной уравнением (32.10) (соответственно плоскости π, заданной уравнением (32.11)).

Расстояние от точки до прямой (до плоскости).

Теорема 35.1. *В прямоугольной декартовой системе координат Oxy расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой* (32.10) *определяется формулой*

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{35.1}$$

Доказательство. Пусть $M_0 \notin l$ (для точек $M_0 \in l$ равенство (35.1) очевидно). Опустим из точки M_0 перпендикуляр на прямую l, пусть $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра. Тогда $\overrightarrow{M_1M_0} = \alpha\,\mathbf{n}$ и

$$\rho(M_0, l) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = |\alpha| \cdot |\,\mathbf{n}| = |\alpha|\sqrt{A^2 + B^2}. \tag{35.2}$$

Найдем α. Так как $x_0 = x_1 + \alpha A$, $y_0 = y_1 + \alpha B$, то $Ax_0 + By_0 + C = Ax_1 + By_1 + C + \alpha(A^2 + B^2) = \alpha(A^2 + B^2)$. Отсюда $\alpha = (Ax_0 + By_0 + C)/(A^2 + B^2)$. Подставив это значение α в (35.2), получим (35.1). ■

Теорема 35.2. *В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости* (32.11) *определяется формулой*

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между прямыми (между плоскостями). Пусть прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) заданы уравнениями (33.1) (соответственно (33.2)).

Вообще говоря, две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) образуют два угла, в сумме равные π. Достаточно определить один их них. Так как векторы нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ перпендикулярны прямым (плоскостям), то угол $\varphi = (\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$ совпадает с одним из углов между прямыми l_1 и l_2 (между плоскостями π_1 и π_2). Итак, согласно (22.6) *угол φ между прямыми* (33.1), *совпадающий с углом между их нормалями, определяется формулой*

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

а угол φ между плоскостями (33.2), *совпадающий с углом между их нормалями, – формулой*

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, *прямые l_1 и l_2 (плоскости π_1 и π_2) перпендикулярны тогда и только тогда, когда*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0).$$

§ 36. Прямая в пространстве

Уравнения прямой. 1. Векторное уравнение (32.6) прямой на плоскости остается справедливым и для прямой в пространстве, так как и в пространстве прямая однозначно определяется точкой и направляющим вектором. Итак (§32), если в пространстве зафиксирован полюс O, то уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{36.1}$$

Пусть в аффинной системе координат точка M_0 имеет координаты (x_0, y_0, z_0), а вектор $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$. Тогда уравнение (36.1) может быть записано в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tk, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{36.2}$$

Уравнения (36.1), (36.2) называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве в векторной и координатной формах соответственно.

2. Уравнение (36.1), означающее коллинеарность векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, может быть записано и в терминах пропорциональности координат векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$ следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \tag{36.3}$$

Уравнения (36.3) называются *каноническими уравнениями прямой* в пространстве.

Так же как и для канонического уравнения (32.3) прямой на плоскости, уравнения (36.3) говорят лишь о пропорциональности координат векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$. Если, например, $m = 0$, то уравнения (36.3)

переходят в уравнения

$$x - x_0 = 0, \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}.$$

Если же $m = 0$, $n = 0$, то уравнения (36.3) переходят в уравнения

$$x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0,$$

т.е. прямая является линией пересечения плоскостей $x - x_0 = 0$ и $y - y_0 = 0$.

3. Для прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, легко получить уравнения (36.1)–(36.3), так как в качестве направляющего вектора может быть взят вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$.

4. Векторное уравнение (36.1) порождает и другие формы векторных уравнений прямой в пространстве. В самом деле, это уравнение означает коллинеарность векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, что согласно критерию коллинеарности (теорема 23.2) равносильно равенству

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \tag{36.4}$$

или, в силу линейности векторного произведения,

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}, \quad \text{где } \mathbf{M} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]. \tag{36.5}$$

Заметим, что уравнения (36.4) и (36.5) лишены смысла для прямой на плоскости; по своей структуре они близки к уравнениям (32.14) и (32.15) плоскости в пространстве.

5. Каждая прямая может быть представлена как пересечение двух плоскостей. Практически уравнения (36.3) задают прямую именно таким образом, так как они эквивалентны системе из двух линейных уравнений, каждое из которых определяет плоскость. Дадим общую формулировку этого факта. В аффинной системе координат $Oxyz$ прямая l, являющаяся линией пересечения плоскостей

$$\pi_i : A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \qquad i = 1, 2,$$

определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{36.6}$$

где

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2. \tag{36.7}$$

Условие (36.7) означает, что плоскости π_1 и π_2 пересекаются (§33, замечание). Систему (36.6) называют *общими уравнениями* прямой в пространстве.

Важно уметь переходить от одного типа уравнения прямой к другому. Переход от каждого из уравнений (36.1)–(36.5) к любому другому очевиден. Для перехода от уравнений (36.6) к (36.1)–(36.5) необходимо найти точку M_0 и направляющий вектор $\mathbf{a}$. Координаты

точки M_0 можно найти как частное решение системы (36.6). Найдем вектор $\mathbf{a}$.

Теорема 36.1. *Если в аффинной системе координат $Oxyz$ прямая l задана общими уравнениями* (36.6), *то вектор*

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \tag{36.8}$$

является направляющим вектором этой прямой.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ в силу условия (36.7). Далее, вектор $\mathbf{a}$ параллелен плоскостям π_1 и π_2, так как разложения определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

по первой строке совпадают с условиями (32.13) параллельности вектора $\mathbf{a}$ плоскостям π_1 и π_2. Итак, ненулевой вектор $\mathbf{a}$ параллелен каждой из плоскостей π_1 и π_2. Следовательно, он является направляющим вектором линии их пересечения. ■

Замечание 1. Для запоминания координат вектора $\mathbf{a}$ может быть использован мнемонический определитель

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ – базис, соответствующий системе координат $Oxyz$. Разложение этого определителя по первой строке совпадает с разложением вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$.

Замечание 2. Теорема 36.1 относится к аффинной системе координат. Очевидно, что в прямоугольной декартовой системе координат, соответствующей ортонормированному базису $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$, вектор (36.8) может быть получен как векторное произведение $[\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}]$ нормалей $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$ к плоскостям π_1 и π_2.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Пусть каждая из прямых l_i, $i = 1, 2$, задана точкой $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и направляющим вектором $\mathbf{a}_i = \{m_i, n_i, k_i\}$ в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$. Положим $\mathbf{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Теорема 36.2. *Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{36.9}$$

Доказательство. Действительно, прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны, т.е. линейно зависимы (теорема 15.2). Согласно теореме 14.2 это равносильно тому, что один из них линейно выражается через другие. В силу линейности координат то же относится и к их координатам, что означает (§16, следствие 1) равенство нулю определителя, строками которого являются эти координаты. ■

Замечание 3. В прямоугольной декартовой системе координат условие (36.9) может быть получено из критерия компланарности векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ (теорема 23.4 и соотношение (23.6)).

Теорема 36.3. *Прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 1, \tag{36.10}$$

параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 2, \tag{36.11}$$

пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 2. \tag{36.12}$$

Доказательство. Условие (36.10) равносильно тому, что векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ коллинеарны; условие (36.11) – тому, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, а векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны, но не коллинеарны; условие (36.12) – тому, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, а векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны. Отсюда следует утверждение теоремы. ■

Взаимное расположение прямой и плоскости. Пусть в пространстве в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$ заданы плоскость

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая

$$l: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a},$$

где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$.

Теорема 36.4. *Прямая l лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} Am + Bn + Ck = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \end{cases}$$

прямая l параллельна плоскости π, но не лежит в ней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} Am + Bn + Ck = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{cases}$$

прямая l пересекает плоскость π тогда и только тогда, когда

$$Am + Bn + Ck \neq 0.$$

Утверждение теоремы следует из критерия (32.13) параллельности вектора $\mathbf{a}$ и плоскости π.

Метрические задачи в прямоугольной декартовой системе координат. Пусть $Oxyz$ – прямоугольная декартова система координат в пространстве.

1. *Углом между двумя прямыми в пространстве* называется любой из углов между параллельными им прямыми, проходящими через какую-либо точку пространства. Таким образом, две прямые в пространстве образуют между собой два различных (если они не перпендикулярны) угла, в сумме равные π. Очевидно, что угол между направляющими векторами прямых равен одному из этих углов. Следовательно, угол φ между прямыми l_i: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + t\,\mathbf{a}_i, i = 1, 2$, совпадающий с углом между их направляющими векторами $\mathbf{a}_i = \{m_i, n_i, k_i\}$, вычисляется согласно (22.6) по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + k_1 k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}.$$

2. *Углом между прямой и плоскостью* (если они не перпендикулярны) называется меньший из углов между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Если же прямая и плоскость перпендикулярны, то угол между ними считается равным $\pi/2$. Угол φ между прямой l: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}$ и плоскостью π: $Ax + By + Cz + D = 0$ находится как дополнительный к углу между направляющим вектором прямой $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$ и вектором нормали к плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и вычисляется согласно (22.6) по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

3. Расстояние $\rho(M_1, l)$ от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой l : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}$ находится как высота h (рис. 1) параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$, площадь и основание которого известны (§23):

$$\rho(M_1, l) = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0]|}{|\mathbf{a}|}.$$

Соотношения (23.5), (22.6) позволяют вычислить $\rho(M_1, l)$ по известным прямоугольным координатам.

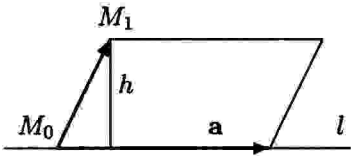


Рис. 1

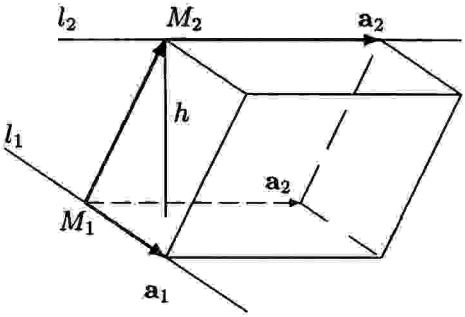


Рис. 2

4. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* l_i: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + t\,\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2$, называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат прямые l_1 и l_2. Это расстояние $\rho(l_1, l_2)$ находится как высота параллелепипеда (рис. 2), построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, объем и площадь основания которого известны (§23):

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2]|}.$$

Соотношения (23.6), (22.6) позволяют вычислить $\rho(l_1, l_2)$ по известным прямоугольным координатам.

Глава VIII. Элементы общей алгебры

В этой главе изучаются фундаментальные для всей алгебры понятия группы, кольца и поля. Они дают возможность с общих позиций взглянуть на рассмотренные в предыдущих главах понятия и факты и ввести, кроме того, новые.

§ 37. Группа

Непустое множество G с заданной на нем алгебраической операцией $*$ называется *группой*, если:

1) операция ассоциативна: $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a, b, c \in G$;

2) операция обладает нейтральным элементом $e \in G$: $a*e = e*a = a$, $\forall a \in G$;

3) для любого элемента $a \in G$ существует симметричный элемент $a' \in G : a*a' = a'*a = e$.

Обозначение: G или $\langle G, * \rangle$. Условия 1–3 называются *аксиомами группы*. Группа с коммутативной операцией называется *коммутативной* или *абелевой*.

О терминологии. Обычно групповую операцию $*$ обозначают специальными символами, чаще всего символами $\cdot$ или $+$, называя $a \cdot b$ (или просто ab) произведением, а $a+b$ – суммой элементов $a, b \in G$. В первом случае нейтральный элемент называют *единицей* (обозначение: 1), симметричный элемент – *обратным* (обозначение: a^{-1}), а саму группу G – *мультипликативной*. Во втором случае нейтральный элемент называют *нулем* (обозначение: 0), симметричный – *противоположным* (обозначение: $-a$), а группу G – *аддитивной*. Если относительно групповой операции нет никаких оговорок, то обычно используют терминологию мультипликативной группы.

Как следует из определения, группа – это абстракция множества, наделенного одной алгебраической операцией. Большинство изученных нами множеств являются конкретными проявлениями этого понятия, т.е. представляют собой группы. Действительно:

а) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$; $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$; $\langle \mathbb{R}, + \rangle$; $\langle V_n, + \rangle$, где $n = 1, 2, 3$; $\langle \mathbb{R}^{m \times n}, + \rangle$; любое линейное пространство V – это аддитивные абелевы группы;

б) $\langle \mathbb{Q} \backslash 0, \cdot \rangle$; $\langle \mathbb{R} \backslash 0, \cdot \rangle$ – мультипликативные абелевы группы;

в) $\langle \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det A \neq 0\}, \cdot \rangle$; $\langle \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det A = 1\}, \cdot \rangle$ – мультипликативные неабелевы группы;

г) множество $S(X)$ всех биективных отображений $f : X \to X$ – мультипликативная неабелева группа.

Из аксиом группы и свойств алгебраической операции (§9) вытекают следующие факты.

1°. *В любой группе существует, и притом единственный, нейтральный элемент.*

2°. *В любой группе для каждого элемента существует, и притом единственный, симметричный элемент.*

Аксиомы группы можно несколько ослабить. Убедимся в этом. Пусть G – множество, наделенное алгебраической операцией. Элемент $e_n \in G$ такой, что $ae_n = a$ для любого $a \in G$, назовем *правой единицей* множества G, а элемент $a_n^{-1} \in G$ такой, что $aa_n^{-1} = e_n$, – *правым обратным к элементу* a.

Теорема 37.1. *Множество G с ассоциативной алгебраической операцией является группой, если оно обладает правой единицей e_n и по отношению к ней каждый элемент $a \in G$ обладает правым обратным.*

Доказательство. Пусть a – произвольный элемент множества G и a_n^{-1} – правый обратный к нему элемент. Тогда $aa_n^{-1} = e_n = e_ne_n = e_n(aa_n^{-1}) = (e_na)a_n^{-1}$, т.е. $aa_n^{-1} = (e_na)a_n^{-1}$. Умножив обе части последнего равенства справа на правый обратный элемент к элементу a_n^{-1}, получим, что $a = e_na$. Таким образом, правая единица множества G оказывается и левой единицей, т.е. просто единицей e множества G.

Покажем теперь, что правый обратный элемент к элементу a является и левым обратным, т.е. $a_n^{-1}a = e$. Действительно, $ea_n^{-1} = a_n^{-1}e = a_n^{-1}(aa_n^{-1}) = (a_n^{-1}a)a_n^{-1}$, т.е. $ea_n^{-1} = (a_n^{-1}a)a_n^{-1}$. Умножив обе части последнего равенства справа на правый обратный элемент к элементу a_n^{-1}, получим $e = a_n^{-1}a$. ■

Следствие. В группе любая правая единица является левой и той единственной единицей, которой эта группа обладает, а любой правый обратный элемент к элементу a группы является левым и тем единственным обратным, которым обладает элемент a.

Теорема 37.2. *Множество G с ассоциативной алгебраической операцией является группой тогда и только тогда, когда эта операция обладает обратной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G – группа; покажем, что уравнения

$$ax = b, \tag{37.1}$$

$$ya = b \tag{37.2}$$

имеют единственное решение для любых $a, b \in G$. Действительно, элемент $x = a^{-1}b$ является решением уравнения (37.1), так как $ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$. Это решение единственно, поскольку если x' - любое другое решение (37.1), то $ax' = ax$ и $a^{-1}(ax') = a^{-1}(ax)$. Следовательно, $x' = x$. Аналогично доказывается утверждение, касающееся уравнения (37.2).

Достаточность. Пусть теперь уравнения (37.1), (37.2) при любых $a, b \in G$ имеют единственное решение. Покажем, что G – группа. Для этого покажем, что выполнены все условия теоремы 37.1.

Действительно, возьмем произвольный элемент $a \in G$. Уравнение $ax = a$ имеет единственное решение. Очевидно, оно играет роль правой единицы для элемента a. Обозначим его e_n^a. Для любого другого

элемента $b \in G$ существует элемент $y \in G$ такой, что $b = ya$ (т.е. y – решение (37.2)). Тогда $b = ya = y(ae_n^a) = (ya)e_n^a = be_n^a$. Следовательно, $be_n^a = b$, $\forall b \in G$, и $e_n^a = e_n$ – правая единица множества G. Далее, уравнение $ax = e_n$ имеет решение, которое, очевидно, является правым обратным к элементу a по отношению к e_n. Отсюда в силу теоремы 37.1 следует, что G – группа. ■

Замечание. Попутно доказано еще одно свойство группы: *в группе любая правая (левая) единица для одного элемента является общей правой (соответственно левой) единицей.*

Итак, групповая операция обладает обратной операцией. В аддитивной группе обратная операция называется *вычитанием (справа и слева)*, а элементы $x = b + (-a)$ и $y = (-a) + b$ – *разностью* (*правосторонней и левосторонней* соответственно). В абелевой группе обе разности совпадают и обозначаются единым символом $b - a$.

§ 38. Подгруппа

Определение. Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой* группы G, если оно само является группой относительно алгебраической операции в G.

Примеры. 1. Простейшими подгруппами любой группы являются ее единичный элемент и сама группа. Эти подгруппы называют *тривиальными*.

2. Множество четных чисел – подгруппа аддитивной группы целых чисел.

3. Множество чисел, кратных p, где $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, – подгруппа аддитивной группы целых чисел.

4. Множество рациональных чисел, отличных от нуля, – подгруппа мультипликативной группы ненулевых действительных чисел.

5. Множество квадратных матриц n-го порядка, определители которых равны единице, – подгруппа мультипликативной группы невырожденных матриц n-го порядка.

Теорема 38.1. *Подмножество H группы G является подгруппой этой группы тогда и только тогда, когда имеют место следующие импликации:*

$$1)\quad a, b \in H \Rightarrow ab \in H;$$
$$2)\quad a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H.$$

Доказательство. Необходимость очевидна, она вытекает из того, что H – группа.

Достаточность. Из первого условия следует, что алгебраическая операция в G является алгебраической операцией и в H. Что же касается аксиом, то необходимо проверить только аксиому единицы. Пусть $a \in H$; тогда, согласно условиям 1 и 2, $a^{-1} \in H$ и $aa^{-1} = e \in H$. ■

Группа невырожденных верхних (нижних) треугольных матриц. Множество M всех невырожденных верхних треугольных матриц n-го порядка образует мультипликативную группу. В этом можно убедиться, показав, что M — подгруппа мультипликативной группы невырожденных матриц n-го порядка, т.е. проверив все требования теоремы 38.1. В самом деле,

а) если A, B – верхние треугольные матрицы, то k-й столбец матрицы AB является линейной комбинацией первых k столбцов матрицы A, поэтому все его элементы, расположенные ниже k-й строки, равны нулю, и, следовательно, AB – верхняя треугольная матрица; невырожденность AB очевидна;

б) если A – невырожденная верхняя треугольная матрица, то k-й столбец матрицы A^{-1} является решением системы уравнений

$$Ax = e_k$$

с треугольной матрицей A, у которой все диагональные элементы отличны от нуля; решая эту систему "снизу вверх", получим

$$x_n = 0, \quad x_{n-1} = 0, \ldots, x_{k+1} = 0,$$

т.е. A^{-1} – верхняя треугольная матрица; невырожденность A^{-1} очевидна.

Группа ортогональных матриц. Множество M всех ортогональных матриц $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ образует мультипликативную группу, так как

а) произведение ортогональных матриц – ортогональная матрица:

$$(Q_1Q_2)^TQ_1Q_2 = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = I, \quad Q_1Q_2(Q_1Q_2)^T = Q_1Q_2Q_2^TQ_1^T = I;$$

б) обратная к ортогональной матрице – ортогональная матрица:

$$Q^{-1} = Q^T, \quad Q^T(Q^T)^T = Q^TQ = I, \quad (Q^T)^TQ^T = QQ^T = I,$$

и согласно теореме 38.1 M – подгруппа мультипликативной группы невырожденных матриц.

Произведение подмножеств группы. Пусть G – группа, M и N – два ее подмножества. *Произведением* MN этих *подмножеств* называется множество всевозможных произведений mn, где $m \in M$, $n \in N$. Итак, $MN = \{mn | m \in M, n \in N\}$. Очевидно, что имеет место свойство ассоциативности: $(MN)K = M(NK)$, так как оба этих произведения состоят из элементов $(mn)k = m(nk)$, где $m \in M$, $n \in N$, $k \in K$.

Если одно из подмножеств состоит только из одного элемента, например $M = \{m\}$, то произведение MN обозначается символом mN, а произведение NM – символом Nm, т.е. в этом контексте нет необходимости отличать элемент от состоящего из одного этого элемента множества.

Замечание. Термин "произведение", используемый здесь, весьма условен, он соответствует терминологии мультипликативной группы, принятой в теории групп. В аддитивной группе, очевидно, MN состоит из сумм $m+n$ элементов подмножеств M и N и обозначается в зависимости от контекста символом $M+N$.

Смежные классы. Пусть H – подгруппа группы G, a – элемент группы G. Множество aH называется *левым смежным классом* группы G по подгруппе H, *порожденным элементом* a, а множество Ha – *правым смежным классом*. Из определения вытекают следующие простейшие свойства смежных классов.

1°. $a \in aH$, $a \in Ha$, так как подгруппа H содержит единицу.

2°. *Смежный класс состоит из элементов группы, причем любой элемент группы входит в какой-нибудь смежный класс* (в силу свойства 1°).

3°. *Подгруппа H является одним из смежных классов* (как левых, так и правых), поскольку $H = eH = He$.

4°. *В абелевой группе* $aH = Ha$, $\forall a \in G$.

Примеры смежных классов содержит следующая таблица.

Таблица

G	H	aH
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	$H = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$mH = Hm = \{m + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv m \pmod 2\}$. Итак, аддитивная группа целых чисел разбивается на два смежных класса по подгруппе четных чисел: это классы всех четных и всех нечетных чисел.
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. $H = \{pk \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$mH = Hm = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv m \pmod p\}$ (см. (7.1)). Итак, аддитивная группа целых чисел разбивается на p смежных классов по подгруппе H чисел, кратных p: $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$, где C_r – класс вычетов по модулю p.
$\langle \mathbb{R}^n, + \rangle$	Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$	Положим $Aa = b$. Тогда $aH = Ha = \{a + x \mid Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$. Итак, смежный класс аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ по подгруппе решений однородной системы $Ax = 0$, порожденный элементом a, представляет собой множество всех решений неоднородной системы $Ax = b$, частным решением которой является a.
$\langle V, + \rangle$, где V – линейное пространство	Пусть L – линейное подпространство V, $H = L$	Пусть $x_0 \in V$. Тогда $x_0 H = Hx_0 = \{x_0 + x \mid x \in L\}$ – линейное многообразие $x_0 + H$.

Теорема 38.2. *Смежный класс порождается любым своим элементом.*

Доказательство. Надо показать, что если $g \in aH$, то $aH = gH$. Пусть $g = ah_1$, $h_1 \in H$. Тогда для любого элемента $h \in H$ имеем

$ah = (ah_1)(h_1^{-1}h) = gh_2$, где $h_2 = h_1^{-1}h \in H$ в силу теоремы 38.1. Значит, $aH \subset gH$. В то же время $gh = a(h_1h) = ah_2$, где $h_2 = h_1h \in H$. Следовательно, $gH \subset aH$, и с учетом вложения в другую сторону получаем требуемое равенство. Доказательство проведено для левого смежного класса, но очевидно, что оно может быть использовано и для правого. ■

Теорема 38.3. *Любые два левых (правых) смежных класса либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 38.2, так как если два смежных класса aH и bH имеют общий элемент g, то $aH = bH = gH$. ■

Итак, вся группа разбивается на непересекающиеся левые (правые) смежные классы по подгруппе H. Это разбиение называется *левосторонним (соответственно правосторонним) разложением группы G по подгруппе H.*

§ 39. Конечная группа

Основные свойства. Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной группой.* Число элементов конечной группы называется ее *порядком* и обозначается символом $\operatorname{card} G$. Бесконечную группу называют группой *бесконечного порядка.* Очевидно, что алгебраическая операция в группе конечного порядка может быть представлена "таблицей умножения" ее элементов. Этим мы воспользуемся в следующих примерах.

1. Группа из одного элемента состоит только из единицы: $G = \{e\}$, при этом алгебраическая операция определяется таблицей

	e
e	e

2. Группа из двух элементов $G = \{e, a\}$ определяется таблицей

	e	a
e	e	a
a	a	e

Здесь $aa \neq a$, так как иначе элемент a будет единицей для a, т.е. (§37, замечание) общей и единственной единицей e. Поэтому $aa = e$.

3. Группа из трех элементов $G = \{e, a, b\}$ определяется таблицей

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Здесь, рассуждая так же, как в примере 2, получаем, что $ab \neq a$, $ab \neq b$, $ba \neq a$, $ba \neq b$. Следовательно, $ab = e = ba$. Аналогично $aa \neq a$, $aa \neq e$ (так как единственным обратным элементу a, как выяснено выше, является элемент b). Следовательно, $aa = b$. Аналогично $bb = a$.

Заметим, что все три рассмотренные группы абелевы.

Теорема 39.1 (теорема Лагранжа). *Во всякой конечной группе порядок ее подгруппы является делителем порядка самой группы.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{card} G = n$, $\operatorname{card} H = k$. Рассмотрим левостороннее разложение группы G по подгруппе H. Оно состоит из всех левых смежных классов aH, где $a \in G$. Каждый класс aH состоит из всех элементов ah, где $h \in H$. Все элементы ah различны (так как если $ah_1 = ah_2$, то $a^{-1}ah_1 = a^{-1}ah_2$ и, значит, $h_1 = h_2$), поэтому каждый класс aH состоит ровно из k элементов. Общее число смежных классов aH равно $m \leq n$. Таким образом, количество всех элементов группы G равно mk, т.е. $n = mk$. ■

Симметрическая группа n-го порядка. Множество S_n (§8) всех подстановок (перестановок) n-го порядка образует мультипликативную группу как множество всех биективных отображений множества на себя. Эта группа называется *симметрической группой n-го порядка*, ее порядок равен $n!$.

Знакопеременная группа n-го порядка. Множество A_n всех четных подстановок n-го порядка образует мультипликативную группу. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что A_n — подгруппа симметрической группы S_n. Для этого проверим все условия теоремы 38.1.

1. Пусть

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in A_n, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \in A_n,$$

т.е. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – четные перестановки из первых n натуральных чисел. Покажем, что $fg \in A_n$. Для этого запишем f в виде

$$f = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

где $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ – четная перестановка из первых n натуральных чисел, так как имеет одинаковую четность с перестановкой $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

2. Очевидно, что если

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}\in A_n,\quad\text{то}\quad f^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}\in A_n.$$

Группа A_n называется *знакопеременной группой n-го порядка*, ее порядок равен $\frac{n!}{2}$, $n\geq 2$.

Циклическая группа. Интересным примером подгрупп служат так называемые циклические подгруппы. Пусть a – элемент группы G, $n\in\mathbb{Z}$. Определим n-ю степень элемента a следующим образом:

$$a^n=\begin{cases}\underbrace{aa\dots a}_{n}, & n>0,\\ 1, & n=0,\\ (a^{-1})^m, & m=-n,\quad n<0.\end{cases}\tag{39.1}$$

Так как при $m>0$ имеем $(a^{-1})^m a^m=1$, то из (39.1) следует, что

$$a^{-m}=(a^{-1})^m=(a^m)^{-1}.\tag{39.2}$$

В аддитивной группе вместо степеней элемента a говорят о кратных элемента a и обозначают символом na.

Нетрудно проверить, что для любых $m,n\in\mathbb{Z}$

$$a^n a^m=a^{n+m},\tag{39.3}$$
$$(a^n)^m=a^{mn}\tag{39.4}$$

(соответственно $na+ma=(n+m)a$, $n(ma)=(nm)a$ для аддитивной группы).

Теорема 39.2. *Множество $\{a\}$ всех целых степеней элемента a группы G образует абелеву группу.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\{a\}$ – абелева подгруппа группы G. Но это следует из теоремы 38.1 с учетом (39.2) и (39.3). ■

Группа $\{a\}$ называется *циклической группой, порожденной элементом a*, при этом элемент a называется *образующим элементом* группы $\{a\}$.

Очевидно, группа $\{a\}$ является подгруппой любой другой подгруппы группы G, содержащей элемент a.

Примером бесконечной циклической группы служит аддитивная группа целых чисел – всякое число кратно числу 1, т.е. это число является образующим элементом рассматриваемой группы. Мультипликативная группа G, состоящая из двух чисел 1 и -1, является циклической группой, порожденной элементом -1.

Теорема 39.3. *Любая подгруппа циклической группы $\{a\}$ является циклической.*

Доказательство. Пусть H – подгруппа циклической группы $\{a\}$, т.е. H состоит из некоторых целых степеней элемента a: $H = \{a^{k_1}, a^{k_2}, \ldots\}$. Пусть, далее, m – наименьшее целое положительное число среди $k_1, k_2, \ldots$. Очевидно, H содержит все элементы вида a^{km}, где $k \in \mathbb{Z}$. Докажем, что в H не может быть других целых степеней элемента a. Пусть $a^n \in H$. Разделим n на m:

$$n = mk + r,$$

где m, $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < m$. Тогда $a^r = a^n a^{-mk}$. Так как $a^n \in H$, $a^{-mk} \in H$, то $a^r \in H$, это противоречит тому, что m – минимальная положительная степень a, содержащаяся в H. ■

Порядок элемента. Степени элемента a с различными показателями не всегда различны, так в аддитивной группе целых чисел разные кратные нуля совпадают: $k0 = l0$, $k \neq l$; в мультипликативной группе ненулевых вещественных чисел: $1^k = 1^l$, $k \neq l$.

Если все степени элемента a различны, то a называется *элементом бесконечного порядка*, в противном случае – *элементом конечного порядка*.

Теорема 39.4. *Если a – элемент конечного порядка, то существует натуральное число n такое, что $a^n = 1$ (в аддитивной группе: $na = 0$).*

Доказательство. Пусть a – элемент конечного порядка, т.е. существуют целые числа k, l такие, что $a^k = a^l$, $k > l$. Тогда $a^{k-l} = 1$ и $a^n = 1$, где $n = k - l \in \mathbb{N}$. ■

Наименьшее $n \in \mathbb{N}$, для которого $a^n = 1$, называется *порядком элемента a*.

Теорема 39.5. *Порядок элемента a группы совпадает с порядком циклической подгруппы $\{a\}$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что если порядок элемента a равен n, то степени $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$ различны, а всякая другая степень совпадает с одним из этих элементов. ■

Следствие 1. В конечной группе порядок любого элемента является делителем порядка группы.

Следствие 2. Все конечные группы простого порядка являются циклическими.

Следствие 3. В конечной группе G порядка n

$$a^n = 1, \quad \forall a \in G.$$

Теорема 39.6. *Элемент a^k является образующим элементом циклической группы $\{a\}$ n-го порядка тогда и только тогда, когда k и n взаимно просты.*

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(k, n)$ и $n = dn'$, $k = dk'$, $n' \leq n$, $k' \leq k$. Тогда элемент a^k будет образующим элементом циклической группы $\{a\}$ n-го порядка тогда и только тогда, когда порядок

элемента a^k совпадает с n. Так как

$$(a^k)^{n'} = a^{kn'} = a^{dk'n'} = (a^n)^{k'} = 1,$$

то порядок элемента a^k будет совпадать с n тогда и только тогда, когда $n' = n$, т.е. тогда и только тогда, когда $d = 1$. ■

§ 40. Нормальный делитель

Определения и свойства. Подгруппа H группы G называется *нормальным делителем*, если для любого элемента $a \in G$

$$aH = Ha, \tag{40.1}$$

т.е. если любой левый (правый) смежный класс одновременно является правым (левым) смежным классом.

Очевидно, что в абелевой группе любая подгруппа является нормальным делителем. Тривиальные подгруппы в любой группе также являются нормальными делителями: оба разложения по единичной подгруппе совпадают с разложением группы на отдельные элементы, оба разложения по самой группе состоят из одного класса – это сама группа. Укажем критерий нормального делителя для произвольной группы.

Элементы a и b группы G называются *сопряженными*, если существует элемент $c \in G$ такой, что $a = c^{-1}bc$.

Теорема 40.1. *Подгруппа H группы G является нормальным делителем тогда и только тогда, когда она вместе с каждым элементом содержит все сопряженные с ним элементы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть H – нормальный делитель, тогда согласно (40.1) $Hc \subset cH$ для любого элемента $c \in G$. Это означает, что для любого элемента $h \in H$ существует $h_1 \in H$ такой, что $hc = ch_1$, т.е. $c^{-1}hc = h_1 \in H$.

Достаточность. Возьмем произвольные элементы $h \in H$, $c \in G$. Тогда $c^{-1}hc \in H$ и $chc^{-1} \in H$. Это означает, что существуют элементы $h_1, h_2 \in H$ такие, что $c^{-1}hc = h_1$, $chc^{-1} = h_2$, или $hc = ch_1$, $ch = h_2c$. Значит, $Hc \subset cH$ и $cH \subset Hc$, т.е. $cH = Hc$. ■

Примером нормального делителя в неабелевой группе является подгруппа матриц с определителем, равным единице, мультипликативной группы невырожденных матриц n-го порядка, так как для элементов этой подгруппы выполнено условие теоремы 40.1: если $|A| = 1$, то $|C^{-1}AC| = |A| = 1$ для любой невырожденной матрицы C.

Фактор-группа. Из смежных классов по нормальному делителю может быть построена новая группа.

Теорема 40.2. *Смежные классы по нормальному делителю образуют группу относительно умножения подмножеств группы.*

Доказательство. Покажем, что произведение смежных классов по нормальному делителю является смежным классом. Действительно, $(aH)(bH) = \{$ в силу ассоциативности произведения $\} = a(Hb)H = \{$ так как H – нормальный делитель $\} = a(bH)H = ab(HH) = abH$. Итак,

$$(aH)(bH) = (ab)H, \tag{40.2}$$

значит, умножение подмножеств группы является алгебраической операцией на множестве смежных классов по нормальному делителю. Ассоциативность этого умножения уже известна (§38). Нейтральным элементом служит сама подгруппа H, так как $(aH)H = (aH)(eH) = (ae)H = aH$, $\forall a \in G$. Обратным элементом к классу aH является класс $a^{-1}H$, так как $(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$. ■

Группа смежных классов группы G по нормальному делителю H называется *фактор-группой группы G по подгруппе H*.

Обозначение: $G|H$.

Группа вычетов по модулю p. Вернемся к смежным классам аддитивной группы целых чисел по подгруппе H чисел, кратных p. Как следует из §38 (пример 2 в таблице), фактор-группа $\mathbb{Z}|H$ состоит ровно из p классов и совпадает с множеством $\mathbb{Z}_p$ классов вычетов по модулю p (§7, пример 3). Алгебраическую операцию в $\mathbb{Z}_p$ (т.е. произведение смежных классов) будем называть сложением, придерживаясь названия исходной операции в группе целых чисел. Согласно (40.2) суммой смежных классов $C_m + C_n$ является класс, который содержит сумму чисел $m + n$:

$$C_m + C_n = C_r, \quad \text{где } r \equiv (m+n) (\mathrm{mod}\, p). \tag{40.3}$$

Итак, $\mathbb{Z}_p$ – аддитивная группа вычетов по модулю p.

§ 41. Морфизмы групп

Изоморфизм. Уже примеры конечных групп (§39) приводят к естественному выводу, что все группы (например, третьего порядка) обнаруживают большое сходство: алгебраические операции в них описываются одной и той же таблицей умножения. Общий подход к выявлению различий или, напротив, к отождествлению групп основан на понятии изоморфизма.

Две группы G_1 и G_2 с операциями $*_1$ и $*_2$ называют *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : G_1 \to G_2$, которое сохраняет групповую операцию, т.е. $f(a *_1 b) = f(a) *_2 f(b)$, $\forall a, b \in G_1$. Обозначение: $G_1 \cong G_2$. Само отображение f при этом называют *изоморфизмом*.

Примеры. 1. Аддитивные группы целых чисел и четных чисел изоморфны, так как отображение $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, есть изоморфизм.

2. Мультипликативная группа положительных вещественных чисел и аддитивная группа всех вещественных чисел изоморфны. В качестве изоморфного отображения f можно взять $f(a) = \ln a$. Извест-

ное свойство логарифма $\ln ab = \ln a + \ln b$ как раз моделирует условие изоморфизма.

Отметим простейшие свойства изоморфизма.

1°. *Отношение изоморфизма является отношением эквивалентности на множестве всех групп.*

Действительно, рефлексивность следует из того, что тождественное отображение является изоморфизмом; симметричность – из того, что если f – изоморфизм, то f^{-1} (которое существует в силу биективности f) также является изоморфизмом, так как $f^{-1}(a' *_2 b') = \{a' = f(a),\ b' = f(b)$ в силу сюръективности $f\} = f^{-1}(f(a) *_2 f(b)) = \{$ибо f – изоморфизм $\} = f^{-1}f(a *_1 b) = a *_1 b = f^{-1}(a') *_1 f^{-1}(b')$; транзитивность – из того, что суперпозиция изоморфизмов, как легко проверить, также является изоморфизмом.

2°. *В изоморфных группах G_1 и G_2 образ (и прообраз) единицы является единицей.*

Действительно, если $a *_1 e = e *_1 a = a$, то $f(a) *_2 f(e) = f(e) *_2 f(a) = f(a)$. Отсюда с учетом того, что элементами $f(a)$ исчерпывается вся группа G_2 (в силу сюръективности f), следует, что $f(e) = e'$ – единица в G_2. Следовательно, образом единицы e является единица e'. Значит, и прообразом единицы e' является e и, в силу инъективности f, только e.

3°. *В изоморфных группах G_1 и G_2 образ (и прообраз) обратного элемента является обратным элементом, т.е. $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.*

Доказательство этого факта аналогично доказательству свойства 2°, оно опирается на определение обратного элемента.

Теорема 41.1 (теорема Кэли). *Любая конечная группа изоморфна некоторой группе перестановок на множестве своих элементов.*

Доказательство. Пусть $G = \{g_0 = e, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$ – группа n-го порядка. Построим отображение φ группы G на некоторое множество S перестановок множества G, положив $\varphi(g) = (g_0 g, g_1 g, \ldots, g_{n-1} g)$ для любого $g \in G$. Так как группа G замкнута относительно групповой операции, то $g_0 g, g_1 g, \ldots, g_{n-1} g \in G$. Более того, эти произведения различны, так как из равенства $g_i g = g_j g$ в силу закона сокращения в группе следует, что $g_i = g_j$, т.е. $i = j$. Следовательно, $g_0 g, g_1 g, \ldots, g_{n-1} g$ – перестановка элементов $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ группы G, $\varphi(g)$ – перестановка множества G:

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} \\ g_0 g & g_1 g & \cdots & g_{n-1} g \end{pmatrix}$$

и S – некоторое подмножество симметрической группы всех перестановок множества G.

Покажем, что φ – изоморфизм:

1) φ – инъективно, так как если $g \neq g'$ $(g' \in G)$, то $\varphi(g) \neq \varphi(g')$ (хотя бы потому, что $g_0 g \neq g_0 g_1$, так как $g_0 = e$), т.е. различным элементам из G соответствуют различные перестановки из S;

2) φ сохраняет групповую операцию, так как

$$\varphi(gg') = \begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_i & \dots & g_{n-1} \\ g_0(gg') & \dots & g_i(gg') & \dots & g_{n-1}(gg') \end{pmatrix},$$

$$\varphi(g')\varphi(g) = \begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_i & \dots & g_{n-1} \\ g_0g' & \dots & g_ig' & \dots & g_{n-1}g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_i & \dots & g_{n-1} \\ g_0g & \dots & g_ig & \dots & g_{n-1}g \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} g_0g & \dots & g_ig & \dots & g_{n-1}g \\ (g_0g)g' & \dots & (g_ig)g' & \dots & (g_{n-1}g)g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_i & \dots & g_{n-1} \\ g_0g & \dots & g_ig & \dots & g_{n-1}g \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_i & \dots & g_{n-1} \\ (g_0g)g' & \dots & (g_ig)g' & \dots & (g_{n-1}g)g' \end{pmatrix} = \varphi(gg').$$

Осталось отметить, что S – группа, т.е. подгруппа группы всех перестановок множества G. Это автоматически вытекает из того, что S – изоморфный образ группы G. ■

Теорема Кэли выделяет семейство S_n, $n = 1, 2, \dots$ симметрических групп, в котором находятся с точностью до изоморфизма все конечные группы.

Теорема 41.2. *Все бесконечные циклические группы изоморфны аддитивной группе целых чисел.*

Доказательство. Если G – бесконечная циклическая группа с образующим элементом a, то соответствие

$$ak \mapsto k$$

будет взаимно однозначным отображением $G \to \mathbb{Z}$. Изоморфность этого отображения вытекает из (39.3). ■

Следствие. Все бесконечные циклические группы изоморфны между собой.

Теорема 41.2 выделяет аддитивную группу целых чисел, с которой с точностью до изоморфизма совпадают все бесконечные циклические группы. Для циклических групп конечного порядка такой объект будет выделен в §46.

Изоморфное отображение группы G на себя называется *автоморфизмом*. Несложная проверка показывает, что множество всех автоморфизмов группы образует группу относительно суперпозиции отображений.

Гомоморфизм. Две группы G_1 и G_2 с операциями $*_1$ и $*_2$ называют *гомоморфными*, если существует сюръективное отображение $\varphi : G_1 \to G_2$, сохраняющее групповую операцию. Само отображение φ называется *гомоморфизмом*.

Отметим простейшие свойства гомоморфизма. В гомоморфных группах

1) *образом единицы является единица*, т.е. $\varphi(e) = e'$, где e и e' – единицы групп G_1 и G_2;

2) *образом обратного элемента является обратный элемент к образу:* $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

Доказательства этих свойств повторяют доказательства аналогичных свойств изоморфизма. Отметим лишь, что к гомоморфизму относятся только первые части свойств изоморфизма.

Пусть φ – гомоморфизм группы G_1 на группу G_2. Множество $\ker\varphi = \{a \in G_1 | \varphi(a) = e'\}$ называется *ядром гомоморфизма* φ.

Теорема 41.3. *Нормальные делители группы, и только они, являются ядрами гомоморфизмов этой группы.*

Доказательство. Достаточность. Ядро гомоморфизма φ группы G_1 является подгруппой группы G_1, так как для него выполнены оба условия теоремы 38.1:

1) если $h_1, h_2 \in \ker\varphi$, то $\varphi(h_1 *_1 h_2) = \varphi(h_1) *_2 \varphi(h_2) = e' *_2 e' = e'$, т.е. $h_1 *_1 h_2 \in \ker\varphi$;

2) если $h \in \ker\varphi$, то $\varphi(h) = e'$ и, значит, $\varphi(h^{-1}) = (e')^{-1} = e'$, т.е. $h^{-1} \in \ker\varphi$.

Эта подгруппа является нормальным делителем, так как для нее выполнено условие теоремы 40.1: если $h \in \ker\varphi$ и $c \in G$, то $\varphi(c^{-1} *_1 h *_1 c) = \varphi(c^{-1}) *_2 \varphi(h) *_2 \varphi(c) = \varphi(c^{-1}) *_2 \varphi(c) = \varphi(c^{-1} *_1 c) = \varphi(e) = e'$, т.е. $c^{-1} *_1 h *_1 c \in \ker\varphi$.

Необходимость. Пусть H – нормальный делитель группы G с операцией $\cdot$, покажем, что существует некоторая группа G' и некоторый гомоморфизм $\varphi : G \to G'$, ядром которого является подгруппа H. В качестве группы G' возьмем фактор-группу $G|H$ группы G по нормальному делителю H. В качестве гомоморфизма возьмем отображение $\varphi : G \to G|H$, которое каждому элементу $a \in G$ ставит в соответствие смежный класс aH, так что $\varphi(a) = aH$. Отображение φ является гомоморфизмом, так как $\varphi(ab) = (ab)H = \{$согласно (40.2)$\} = (aH)(bH) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in G$. Ядром этого гомоморфизма служит, очевидно, сам нормальный делитель H. ■

Построенное отображение $\varphi : G \to G|H$ называется *естественным гомоморфизмом.*

§ 42. Кольцо

Определение, простейшие свойства. Перейдем к рассмотрению множеств, наделенных двумя алгебраическими операциями. Будем называть одну из этих операций сложением (и обозначать символом $+$), а другую – умножением (и обозначать символом $\cdot$).

Непустое множество K, наделенное двумя алгебраическими операциями – сложением и умножением, называется *кольцом*, если эти операции удовлетворяют следующим аксиомам: $\forall a, b, c \in K$

1) $a + b = b + a$;

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) $\exists 0 \in K : a+0=0+a=a$;
4) $\forall a \in K \ \ \exists -a \in K : a+(-a)=(-a)+a=0$;
5) $(ab)c=a(bc)$;
6) $(a+b)c=ab+bc, \ \ a(b+c)=ab+ac$.

Кольцо называется *коммутативным*, если умножение в нем коммутативно; кольцо называется *кольцом с единицей*, если операция умножения обладает нейтральным элементом. Из аксиом кольца следует, что кольцо является аддитивной абелевой группой.

Очевидно, множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ образуют коммутативные кольца с единицей относительно обычных операций сложения и умножения чисел; множество всех четных чисел – коммутативное кольцо без единицы; множество $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц n-го порядка – некоммутативное кольцо с единицей относительно известных операций сложения и умножения матриц.

Отметим простейшие свойства кольца, все они опираются на свойства множеств с одной ассоциативной операцией, и в частности, на свойства группы.

1°. *Кольцо обладает всеми свойствами аддитивной абелевой группы;* в частности, в кольце:

а) существует, и притом единственный, нулевой элемент 0;

б) для каждого элемента a существует, и притом единственный, противоположный элемент $-a$;

в) для любых элементов $a, b \in K$ существует, и притом единственное, решение уравнения $x+a=b$; это решение называется *разностью* элементов b и a и обозначается символом $b-a$. Итак, $b-a=b+(-a)$.

г) определены целые кратные элемента (см. (39.1), (39.2)):

$$na=\begin{cases} \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}, & n>0, \\ 0, & n=0, \\ m(-a)=-(ma), & m=-n, \ \ n<0. \end{cases}$$

2°. *В кольце умножение дистрибутивно относительно вычитания*, т.е. $a(b-c)=ab-ac$, $(a-b)c=ac-bc$, $\forall a,b,c \in K$.

Это следует из того, что $b=(b-c)+c$ и $ab=a(b-c)+ac$.

3°. *В кольце для любого элемента* a: $a0=0a=0$.

Это следует из дистрибутивности умножения относительно вычитания: $a0=a(b-b)=ab-ab=0$.

4°. *В кольце для любых элементов* a, b: $(-a)b=a(-b)=-ab$.

Это следует из того, что $ab+(-a)b=(a+(-a))b=0b=0$.

Следствие. $(-a)(-b)=ab$, $\forall a,b \in K$.

5°. *В кольце с единицей для любого элемента* a:

$$(-1)a=a(-1)=-a.$$

Это следует из того, что $a+(-1)a=1a+(-1)a=(1+(-1))a=0a=0$.

6°. *В кольце с единицей, содержащем не менее двух элементов:* $1 \neq 0$.

Действительно, если $0 = 1$, то существует $a \in K$: $a \neq 0$, $a \neq 1$. Тогда из равенства $0 = 1$ следует, что $0a = 1a$, т.е. $0 = a$, но $a \neq 0$.

7°. *В кольце с единицей множество обратимых (по умножению) элементов образует мультипликативную группу.*

Это следует из того, что произведение обратимых элементов обратимо, т.е. умножение в кольце является алгебраической операцией на этом множестве.

Делители нуля. В кольце, как мы отмечали выше, алгебраические операции сложения, вычитания и умножения обладают свойствами привычных нам операций над числами. Однако кольцо обладает и специфическим свойством, которого нет в числовых множествах. Так, для чисел из равенства $ab = 0$ следует, что одно из чисел a или b равно нулю. В кольце это может и не выполняться. Например, в кольце матриц второго порядка существуют ненулевые матрицы, произведение которых равно нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевые элементы a и b кольца называются *делителями нуля*, если $ab = 0$. При этом элемент a называется *левым* делителем нуля, а элемент b – *правым*.

Кольцо вычетов. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$ вычетов по модулю p (§40). Напомним, что сложение на $\mathbb{Z}_p$ определено правилом (40.3), т.е. $C_m + C_n$ – это класс, в который входит число $m + n$. Известно, что $\mathbb{Z}_p$ – группа относительно так введенной операции сложения (§40). Отметим, что это абелева группа, так как числа $m + n$ и $n + m$ входят в один и тот же класс. Отметим также, что нулем этой группы является класс C_0 чисел, кратных p, а противоположным к классу C_m – класс

$$-C_m = \begin{cases} C_0, & m = 0, \\ C_{p-m}, & m > 0. \end{cases}$$

Определим на $\mathbb{Z}_p$ операцию умножения. Положим

$$C_m C_n = C_r, \quad \text{где} \quad r \equiv mn \pmod{p},$$

т.е. $C_m C_n$ – это класс, в который входит число mn. Эта операция обладает следующими свойствами:

1) $C_m C_n = C_n C_m$, так как $C_m C_n$ – класс, в который входит nm, а $mn = nm$;

2) $(C_m C_n) C_k = C_m (C_n C_k)$, так как оба произведения представляют собой один и тот же класс, в который входит число $(mn)k = m(nk)$;

3) *существует единица* C_1, так как $C_m C_1 = C_1 C_m = C_m$;

4) $(C_m + C_n) C_k = C_m C_k + C_n C_k$, так как обе части равенства представляют собой класс, в который входит число $(m + n)k = mk + nk$;

5) *если p – составное число, то в кольце $\mathbb{Z}_p$ есть делители нуля*, так как если $p = mn$, где $1 < m < p$, $1 < n < p$, то $C_m, C_n \in \mathbb{Z}_p$ и $C_m C_n = C_0$.

Таким образом, $\mathbb{Z}_p$ – конечное коммутативное кольцо с единицей, которое имеет делители нуля, если p – составное число. Оно называется *кольцом вычетов по модулю p*.

Подкольцо. *Подкольцом* кольца K называется подмножество F этого кольца, которое само является кольцом относительно операций, определенных в K. При этом говорят, что кольцо K является *расширением кольца F*, а кольцо F *вложено в кольцо K*.

Так, кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел является расширением кольца $\mathbb{Z}_{2k}$ четных чисел и подкольцом кольца $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Легко показать, что множество

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

является кольцом. Оно вложено в кольцо $\mathbb{R}$ действительных чисел.

§ 43. Поле

Определение, простейшие свойства. *Полем* называется коммутативное кольцо с единицей, содержащее не менее двух элементов, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный элемент. Из определения вытекают следующие свойства поля.

1°. *Поле обладает всеми свойствами кольца.*

2°. *В поле нет делителей нуля*, так как если $ab = 0$, $a \neq 0$, то $a^{-1}(ab) = b = 0$.

Следствие. Умножение является алгебраической операцией на множестве всех ненулевых элементов поля.

3°. *В поле P множество всех ненулевых элементов образует мультипликативную коммутативную группу*, и поэтому в поле:

а) *существует, и притом единственная, единица, причем $1 \neq 0$;*

б) *для любого элемента $a \neq 0$ существует, и притом единственный, обратный элемент;*

в) *для любых $a, b \in P$, $a \neq 0$, уравнение $ax = b$ имеет единственное решение, при этом $x = a^{-1}b = ba^{-1}$*; этот элемент называется *частным от деления b на a* и обозначается символом $\frac{b}{a}$ или b/a.

4°. *В поле сохраняются все обычные правила обращения с дробями:*

а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, так как равенство $b^{-1}a = cd^{-1}$ равносильно равенству $b(b^{-1}a)d = b(cd^{-1})d$, т.е. $ad = bc$;

б) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, $\quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

в) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Правила "б", "в" доказываются так же, как и "а".

Тем самым все правила и формулы элементарной алгебры полностью сохраняются в любом поле, так как в их основе лежат одни и те же свойства операций сложения, вычитания, умножения и деления.

Элементы поля называют *числами*. Очевидно, множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел и $\mathbb{R}$ всех действительных чисел являются полями.

Расширение поля. Подмножество F поля P называется *подполем поля* P, если оно само является полем относительно операций, определенных в P. При этом говорят, что поле P является *расширением поля* F, а поле F *вложено в поле* P.

Так, поле $\mathbb{R}$ действительных чисел является расширением поля рациональных чисел. Еще одно расширение поля рациональных чисел можно получить, рассматривая числа вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a и b. Легко показать, что множество

$$F=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$$

образует поле. Очевидно, что поле $\mathbb{Q}$ является его подполем.

Любое поле, элементами которого являются действительные числа с операциями сложения и умножения действительных чисел, будем называть *числовым полем*.

Теорема 43.1. *Поле рациональных чисел вложено в любое числовое поле.*

Доказательство. Пусть P – поле, элементами которого являются числа $a\in\mathbb{R}$. Если $a\neq 0$, то P содержит частное $\frac{a}{a}$, т.е. число 1. Складывая число 1 с самим собой несколько раз, мы получим, что все натуральные числа n содержатся в P. С другой стороны, в поле P должна содержаться разность $n-n$, т.е. число 0, поэтому в поле P находятся и результаты вычитания $0-n$, $n\in\mathbb{N}$, т.е. все отрицательные числа. Наконец, в поле P содержатся и частные целых чисел, т.е. вообще все рациональные числа. ■

В заключение отметим, что расширение поля $\mathbb{R}$ действительных чисел будет дано в §44.

Изоморфизм колец и полей. Среди множества колец (и полей) встречаются кольца (соответственно поля), неразличимые с точки зрения свойств действующих в них алгебраических операций. Эта "одинаковость" формализуется понятием изоморфизма.

Два кольца K и K' (или два поля P и P') называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi\colon K\to K'$ (соответственно $\varphi\colon P\to P'$), сохраняющие операции:

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),\ \ \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),\ \ \forall a,b\in K\ \text{(соответственно } P).$$

Нетрудно показать (§41), что

1) отношение изоморфизма является отношением эквивалентности на множестве всех колец (и полей);

2) в изоморфных кольцах (и полях):

а) образ и прообраз нуля есть нуль;

б) образ и прообраз противоположного элемента есть противоположный элемент;

в) образ и прообраз разности есть разность соответствующих элементов;

г) образ и прообраз единицы (в случае кольца, если оно обладает единицей) есть единица;

д) образ и прообраз обратного элемента (в случае кольца, если элемент обладает обратным элементом) есть обратный элемент;

3) свойство кольца иметь или не иметь делители нуля сохраняется и в изоморфном кольце.

Из перечисленных свойств следует, что *кольцо, изоморфное полю, само будет полем.*

Таким образом, изоморфные кольца (и поля) могут отличаться друг от друга только природой своих элементов, но они тождественны по своим алгебраическим свойствам:

всякая теорема, доказанная для некоторого кольца (или поля) будет справедлива для всех колец (соответственно полей), с ним изоморфных, если только доказательство теоремы опиралось лишь на свойства алгебраических операций, но не на индивидуальные особенности элементов этого кольца (соответственно поля).

Характеристика поля. Существуют поля, в которых некоторое целое кратное 1, т.е. $n1 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$, равно нулю. Наименьшее натуральное число n, обладающее этим свойством, называется *характеристикой поля.* Если указанное свойство не имеет места ни для какого натурального числа n, то говорят, что такое поле имеет характеристику 0. Очевидно, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ – поля характеристики 0.

Примерами полей характеристики $p \geq 1$ служат все конечные поля. В самом деле, конечное поле является конечной аддитивной группой, при этом характеристика поля $p \geq 1$, так как p совпадает с порядком элемента 1, являющимся делителем порядка самой группы (§39, следствие 1).

Теорема 43.2. *Характеристикой поля может быть либо* 0, *либо простое число.*

Доказательство. Пусть n – характеристика поля и n – составное число, т.е. $n = mk$, где $m, k \in \mathbb{N}$, $m < n$, $k < n$. Тогда в силу дистрибутивности

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{m}\,\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{k} = 0.$$

Так как в поле нет делителей нуля, то отсюда следует, что либо $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m} = 0$, либо $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k} = 0$, т.е. n – не наименьшее натуральное число, обладающее указанным свойством. ■

Теорема 43.3. *Если P – поле характеристики p, то для любого элемента $a \in P$ имеет место равенство*

$$pa = 0.$$

Доказательство. В самом деле, из свойства дистрибутивности следует, что $pa = a(p1) = a \cdot 0 = 0$. ■

Поле вычетов. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ не будет полем, если p составное, так как в этом случае в кольце $\mathbb{Z}_p$ есть делители нуля (§42).

Теорема 43.4. *Если p – простое число и $p \geq 2$, то $\mathbb{Z}_p$ – поле характеристики p.*

Доказательство. Покажем, что $\mathbb{Z}_p$ – поле. Так как $\mathbb{Z}_p$ – коммутативное кольцо с единицей (§42), то достаточно показать, что для любого элемента $C_m \in \mathbb{Z}_p$, $m \neq 0$, существует обратный элемент. Для этого рассмотрим все возможные произведения $C_m C_k$, где $k = \overline{0, p-1}$. Этих произведений имеется ровно p (т.е. столько же, сколько элементов в $\mathbb{Z}_p$), и все они различны, так как из того, что $C_m C_k = C_m C_n$, $k \neq n$, следует, что $mk \equiv mn (\mathrm{mod}\, p)$ или что $mk - mn$ делится нацело на p. Следовательно, $m(k-n)$ делится на p, причем $0 < m < p$, $0 < k - n < p$. Это означает, что p – составное число. Таким образом, произведения $C_m C_k$ $(k = \overline{0, p-1})$ по одному разу пробегают все множество $\mathbb{Z}_p$ и, значит, одно из них совпадает с C_1. Итак, для любого класса C_m, где $m \neq 0$, существует класс C_k такой, что $C_m C_k = C_1$. Следовательно, $\mathbb{Z}_p$ – поле. Характеристика этого поля равна p, так как $\underbrace{C_1 + C_1 + \ldots + C_1}_{p} = C_0$, $\underbrace{C_1 + C_1 + \ldots + C_1}_{m} = C_m \neq C_0$ при $m < p$. ■

Теорема 43.5. *Любое поле характеристики $p \geq 1$ с точностью до изоморфизма является расширением поля вычетов $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. В поле характеристики p элементы, кратные 1, т.е. элементы вида $n1$, где $n = \overline{0, p-1}$, различны. Легко показать, что эти элементы образуют подполе. Оно изоморфно полю вычетов $Z_p = \{C_0, \ldots, C_{p-1}\}$: изоморфизм устанавливается отображением $\varphi(n1) = C_n$, $n = \overline{0, p-1}$. ■

Следствие. Любое конечное поле с точностью до изоморфизма является расширением некоторого поля вычетов.

Замечание. До сих пор при изучении алгебраических объектов мы предполагали, что в их основе лежат вещественные числа: вещественные матрицы, вещественные линейные пространства, вещественные системы линейных алгебраических уравнений, многочлены с вещественными коэффициентами. Все факты, касающиеся этих объектов, остаются справедливыми, если вместо поля вещественных чисел рассматривать любое поле. Это легко проверить, так как доказательства таких утверждений опирались лишь на свойства алгебраических операций в поле.

В дальнейшем вместо термина "вещественная матрица" будем употреблять термин "матрица над полем P", так же как и термины "линейное пространство над полем P", "система линейных алгебраических уравнений над полем P", "многочлен над полем P".

Этим замечанием мы воспользуемся уже сейчас для доказательства следующей теоремы.

Теорема 43.6. *В конечном поле число элементов n имеет вид*

$$n = p^m, \tag{43.1}$$

где p – простое, m – натуральное числа.

Доказательство. Любое конечное поле является полем характеристики $p \geq 1$. Так как у изоморфных полей одинаковое число элементов, то согласно теореме 43.5 достаточно показать, что в конечном расширении поля $\mathbb{Z}_p$ содержится $n = p^m$ элементов, где $m \in \mathbb{N}$ (очевидно, p – простое число, так как $\mathbb{Z}_p$ – поле). Покажем это.

Пусть $F = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ – расширение поля $\mathbb{Z}_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$. Очевидно, что поле F является линейным пространством над полем $\mathbb{Z}_p$. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ – базис пространства F. Тогда F – множество всевозможных линейных комбинаций

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_p, \quad i = \overline{1, m}. \tag{43.2}$$

Так как для каждого α_i возможно p различных значений, то всего элементов вида (43.2) будет p^m. ■

Глава IX. **Комплексные числа**

В этой главе рассматривается новая система чисел, которая является расширением поля действительных чисел. Подобно известной из элементарной алгебры цепочке расширений $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, каждое звено которой связано с необходимостью решения той или иной задачи, расширение поля действительных чисел связано с проблемой решения квадратных уравнений. Мы расширим поле действительных чисел так, чтобы любое квадратное уравнение, в частности простейшее из них $x^2+1=0$, имело решение. Прежде чем вводить эти "новые" числа, отметим, что при каждом известном расширении "старые" числа становились частью "новых", т.е. отождествлялись с некоторым классом новых чисел. Например, натуральное число 5 отождествлялось с целым числом $+5$, или с рациональным числом $\frac{5}{1}$, или с действительным числом $4,9999\ldots$

§ 44. Поле комплексных чисел

Понятие комплексного числа. *Комплексными числами* называются упорядоченные пары (a,b) вещественных чисел, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления с вещественными числами вводятся согласно следующим правилам (аксиомам):

1) $(a,b)=(c,d) \iff a=c,\ b=d$;
2) $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$;
3) $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$;
4) пара $(a,0)$ отождествляется с действительным числом a.

Обозначения: $z=(a,b)$, $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел.

Замечание 1. В первых трех аксиомах речь идет об определении разных понятий, поэтому их сопоставление не может привести к каким-либо противоречиям. В несколько другом положении находится аксиома 4. Дело в том, что понятия равенства, суммы и произведения для вещественных чисел уже имеют определенный смысл и они *не должны противоречить* правилам 1 – 3. Но, как нетрудно проверить, правила 1 – 3 для вещественных чисел, как пар специального вида, совпадают с обычными правилами равенства, сложения и умножения вещественных чисел (проверьте!).

Теорема 44.1. *Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел является полем.*

Доказательство. Действительно, сложение и умножение являются алгебраическими операциями на множестве $\mathbb{C}$, при этом непосредственной проверкой легко установить, что они подчиняются

всем аксиомам поля. Отметим лишь, что $0 = (0,0)$; $1 = (1,0)$; $-z = (-a,-b)$; $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$, если $z = (a,b) \neq 0$. ■

Следствие 1. *Для любой пары комплексных чисел* $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$ *существует, и притом единственная, разность* $z_1 - z_2 = (a-c, b-d)$.

Следствие 2. *Для любой пары комплексных чисел* $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d) \neq 0$ *существует, и притом единственное, частное*

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Алгебраическая форма комплексного числа. Введем обозначение: $i = (0,1)$. Из аксиом 1 – 4 непосредственно вытекают следующие свойства комплексных чисел.

1°. $i^2 = -1$, так как $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$.

2°. Любое комплексное число $z = (a,b)$ может быть записано в виде

$$z = a + bi, \tag{44.1}$$

так как $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1)$.

Форма (44.1) записи комплексного числа $z = (a,b)$ называется *алгебраической формой* числа z, при этом число a называется *действительной частью* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается символом $\operatorname{Re} z$, а b – *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im} z$. Для вещественных чисел мнимая часть равна нулю. Комплексные числа, у которых действительная часть равна нулю, называются *чисто мнимыми*. Очевидно, два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда по отдельности равны их действительные и мнимые части.

Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется *сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Теорема 44.2. *Операция сопряжения комплексного числа обладает следующими свойствами:*

1) $\overline{\overline{z}} = z$;

2) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$;

3) $\overline{z} + z = 2a$, $\forall z = a + bi$;

4) $\overline{z}z = a^2 + b^2$, $\forall z = a + bi$;

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$, $z_2 \neq 0$.

Все свойства проверяются непосредственно исходя из определения. ■

Замечание 2. Для комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, операции сложения, вычитания, умножения и деления производятся по обычным правилам выполнения этих операций над двучленами $a+bi$ с учетом того, что $i^2 = -1$, и последующим приведением подобных членов (т.е. отдельно группируются вещественные числа и чисто мнимые). Особенно это удобно для умножения чисел:

если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Для деления чисел удобно числитель и знаменатель дроби z_1/z_2 предварительно умножить на $\overline{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{z_2\overline{z_2}} = \{z_2\overline{z_2} = c^2 + d^2 \neq 0\} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Комплексная плоскость. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат. Поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = a + bi$ точку M (рис. 1) этой плоскости с координатами (a, b). Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно. Вещественные числа изображаются точками оси абсцисс; на оси ординат располагаются изображения чисто мнимых чисел. Началу координат соответствует число ноль; сопряженные комплексные числа изображаются точками, симметричными относительно оси абсцисс (рис.1).

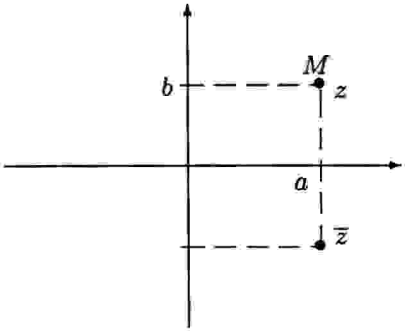


Рис. 1

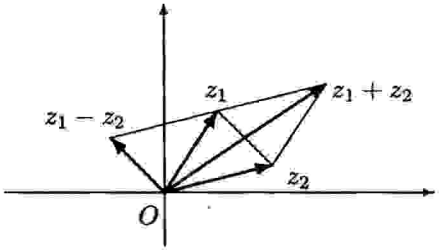


Рис. 2

Плоскость, точками которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ее ось абсцисс – *вещественной осью*, ось ординат – *мнимой осью* (в соответствии с наименованием чисел, изображения которых лежат на этих осях).

Простое геометрическое истолкование получают на комплексной плоскости операции сложения и вычитания комплексных чисел. Так как каждая точка $M(a, b)$ плоскости связана с ее радиус-вектором $\mathbf{r} = \{a, b\}$, то комплексное число $z = a + bi$ можно изображать на комплексной плоскости радиус-вектором точки $M(a, b)$. При сложении (вычитании) комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ складываются (вычитаются) координаты радиус-векторов $\mathbf{r}_1\{a, b\}$ и $\mathbf{r}_2\{c, d\}$ точек, изображающих эти числа. Поэтому сложение (вычитание) комплексных чисел равносильно сложению (вычитанию) радиус-векторов (рис. 2) и может быть выполнено по правилу параллелограмма (§11).

Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел станет ясным из другой формы комплексного числа.

Сопряженная матрица. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ – матрица размера $m \times n$ над полем комплексных чисел. Матрица $A^H = (a^h_{ij})$ размера $n \times m$ называется *сопряженной* к матрице A, если

$$a^h_{ij} = \overline{a_{ji}}, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

Очевидно, что $A^H = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$, где $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

Из определения и теоремы 44.2 вытекают следующие свойства сопряженной матрицы:

1) $(A+B)^H = A^H + B^H$;
2) $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;
3) $(AB)^H = B^H A^H$;
4) $(A^H)^H = A$;
5) $\det A^H = \overline{\det A}$;
6) $\operatorname{rg} A^H = \operatorname{rg} A$,

выполненные для всех матриц, для которых определены левые части равенств.

Замечание 3. Ранее был изложен способ построения поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел как расширения поля $\mathbb{R}$ действительных чисел. Помимо этого способа существуют и многие другие. Один из них использует сложение и умножение матриц. Опишем его.

1. Множество матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ над полем действительных чисел образует поле относительно операций сложения и умножения матриц. Обозначим его символом C'. Итак,

$$C' = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Множество

$$R' = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

образует подполе поля C'.

3. Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел изоморфно полю C', изоморфизм строится как отображение $\varphi\colon \mathbb{C} \to C'$, которое любому комплексному числу $z = a + bi$ ставит в соответствие матрицу $\varphi(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Отображение φ переводит все вещественные числа $a \in \mathbb{R}$ в скалярные матрицы $\varphi(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, все мнимые числа bi, $b \in \mathbb{R}$, – в матрицы $\varphi(bi) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$, в частности $\varphi(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Таким образом, поле комплексных чисел можно рассматривать и как поле действительных матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, в котором роль действительных чисел играют матрицы вида $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, роль мнимой единицы – матрица $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

§ 45. Тригонометрическая форма комплексного числа

Алгебраическая форма комплексного числа $z = a + bi$ связана с декартовыми координатами точки $M(a, b)$, изображающей это число на комплексной плоскости. Однако положение точки на плоскости однозначно определяется и ее полярными координатами (§25): расстоянием r от этой точки до начала координат и углом φ между положи-

тельным направлением оси абсцисс и радиус-вектором точки $M(a, b)$ (рис. 1). В соответствии с этим вводятся следующие характеристики комплексного числа.

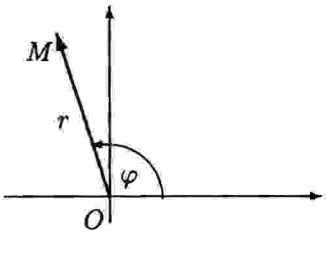


Рис. 1

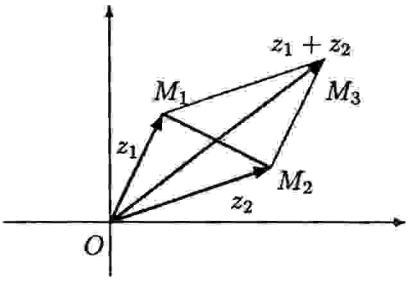


Рис. 2

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Обозначение: $|z|$. Из определения вытекают следующие свойства.

1°. $|z|$ – действительное неотрицательное число, причем

$$|z| = 0 \iff z = 0.$$

2°. $|z|$ совпадает с полярным радиусом точки M, изображающей это число на комплексной плоскости (рис. 1).

3°. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

4°. Модуль вещественного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол φ между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором точки M (рис. 1), отсчитываемый от оси абсцисс в любом направлении, при этом положительным считается направление против часовой стрелки. Обозначение: $\arg z$. Из определения вытекают следующие свойства.

1°. $\arg z$ не определен для $z = 0$, а для $z \neq 0$ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π, так как при одном и том же r углы, отличающиеся на слагаемое $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, определяют одну и ту же точку комплексной плоскости, т.е. одно и то же комплексное число.

2°. $\arg z$ отличается от полярного угла точки M тем, что $\arg z$ имеет бесконечно много значений.

3°. Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \quad \text{и, если} \quad |z_1| \neq 0, \\ \arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{45.1}$$

Теорема 45.1. *Любое комплексное число $z \neq 0$ может быть записано в виде*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{45.2}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Доказательство. Пусть $z = a + bi$. Тогда из соотношений (25.1), связывающих прямоугольные координаты с полярными, следует, что $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. ■

Форма (45.2) записи комплексного числа называется *тригонометрической формой* этого числа.

Теорема 45.2. *Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место неравенства*

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{45.3}$$

Доказательство. Неравенства (45.3) вытекают из правила параллелограмма сложения и вычитания комплексных чисел (§44) и неравенств треугольника (рис. 2: $\triangle OM_2M_3$, $\triangle OM_1M_2$). Это обоснование относится к случаю, когда точки O, M_1, M_2 не лежат на одной прямой (очевидно, при этом неравенства (45.3) будут строгими). Если же точки O, M_1, M_2 лежат на одной прямой, то несложный перебор вариантов расположения этих точек приводит к неравенствам (45.3), которые в некоторых из этих вариантов могут обратиться в равенства. ■

Неравенства (45.3) называют *неравенствами треугольника на комплексной плоскости*. Отметим, что теорема 45.2 относится только к модулям; для самих комплексных чисел неравенство не определено.

Теорема 45.3. *При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются; при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2; \tag{45.4}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2, \quad z_2 \ne 0. \tag{45.5}$$

Доказательство. Пусть $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, где $k = 1, 2$. Тогда $z_1z_2 = r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Отсюда следует (45.4). Если $z_2 \ne 0$, то $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \dfrac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$. Отсюда следует (45.5). ■

Замечание 1. Если один из сомножителей в (45.4) или z_1 в (45.5) равен нулю, то теорема относится только к модулям.

Замечание 2. Соотношения (45.4) переносятся и на любое число сомножителей (достаточно применить метод математической индукции).

§ 46. Возведение в степень и извлечение корня

Возведение в степень. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{C}$. Число z^n, определенное равенствами $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n}$ при $n \in \mathbb{N}$; $z^n = 1$ при $n = 0$ (в этом случае предполагается, что $z \neq 0$); $z^n = 1/z^m$ при $m = -n \in \mathbb{N}$, называется *n-й степенью числа z*.

Теорема 46.1. *Если* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$, *то*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{46.1}$$

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ равенство (46.1) вытекает из (45.4). Для $n = 0$ равенство (46.1) следует из определения: $z^0 = 1 = r^0(\cos 0 + i\sin 0)$. Если $n < 0$ и $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$z^n = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} = r^n(\cos m\varphi - i\sin m\varphi) =$$
$$= r^n(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad \blacksquare$$

Формула (46.1) называется *формулой Муавра*.

Извлечение корня. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Корнем n-й степени из комплексного числа z* называется число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\alpha^n = z$.

Очевидно, что для $z = 0$ существует единственный корень n-й степени, равный нулю (так как $\alpha^n = 0 \Leftrightarrow |\alpha|^n = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$).

Теорема 46.2. *Для ненулевого числа* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *существует ровно n различных корней* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *n-й степени:*

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{46.2}$$

Доказательство. Пусть α – корень n-й степени из числа z и $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Тогда $\alpha^n = z$ или, в силу (46.1), $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Согласно (45.1) это означает, что

$$\rho^n = r, \qquad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\rho > 0$, $r > 0$, то существует единственный положительный корень n-й степени ρ из положительного числа r – это арифметический корень $\rho = \sqrt[n]{r}$. Таким образом, число $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ является корнем n-й степени из числа z тогда и только тогда, когда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

т.е. числа $\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, и только они, являются корнями n-й степени из числа z. Числа α_k для $k = \overline{0, n-1}$

различны, так как их аргументы отличаются самое большее на $\frac{2\pi(n-1)}{n} < 2\pi$. Числа α_k при $k \geq n$ совпадают с одним из корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, так как если $k = nq + r$, $0 \leq r \leq n-1$, то

$$\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi nq + 2\pi r}{n} = \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + 2\pi q,\ q \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $\alpha_k = \alpha_r$. ■

Геометрическая интерпретация корней. На комплексной плоскости все корни n-й степени из ненулевого числа z расположены на окружности радиуса $\rho = \sqrt[n]{|z|}$ и делят эту окружность на n равных частей (так как $\arg \alpha_k = \arg \alpha_{k-1} + 2\pi/n$).

В частности, все корни n-й степени из единицы имеют вид

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{46.3}$$

Они расположены на единичной окружности и делят ее на n равных частей, начиная с $\varepsilon_0 = 1$. При этом действительных корней может быть либо два, если n четно (ε_0 и $\varepsilon_{n/2}$), либо один, если n нечетно (ε_0). В любом случае недействительных корней четное число, они расположены симметрично относительно действительной оси, т.е. попарно сопряжены.

Теорема 46.3. *Все корни n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$ получаются умножением одного из этих корней на все корни n-й степени из единицы.*

Доказательство. Пусть α_k, $k = \overline{0, n-1}$, – корни n-й степени из $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, определяемые равенством (46.2). Тогда, согласно (45.4) и (46.3), $\alpha_k\varepsilon_0 = \alpha_k$, $\alpha_k\varepsilon_1 = \alpha_{k+1}, \ldots$, $\alpha_k\varepsilon_{n-k} = \alpha_0, \ldots$, $\alpha_k\varepsilon_{n-1} = \alpha_{k-1}$. ■

Группа корней n-й степени из единицы. Рассмотрим множество $H_n = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$ всех корней n-й степени из единицы.

1. H_n – абелева мультипликативная группа, как подгруппа мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел (согласно теореме 38.1).

2. H_n – циклическая группа, порожденная корнем ε_1, так как $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

Более того, этой группой исчерпываются по существу все конечные циклические группы порядка n (это было обещано в §41).

Теорема 46.4. *Все циклические группы порядка n изоморфны мультипликативной группе корней n-й степени из единицы.*

Доказательство. Пусть a – образующий элемент циклической группы G. Построим изоморфизм. Каждому элементу $a^k \in G$, $0 \leq k < n$, поставим в соответствие корень ε_k n-й степени из единицы. Это будет взаимно однозначное отображение группы G на мультипликативную группу H_n корней n-й степени из единицы, изоморфность которого следует из (39.3). ■

Корень ε_k называется *первообразным корнем n-й степени из единицы*, если он не является корнем из единицы никакой меньшей степени, чем n. Очевидно, для любого $n \geq 2$ число ε_1 – первообразный корень. Помимо ε_1 могут существовать и другие первообразные корни. Например, при $n = 4$: $H_4 = \{1, i, -1, -i\}$ и $\varepsilon_3 = -i$ также является первообразным корнем, так как $\varepsilon_3^0 = 1$, $\varepsilon_3^1 = -i$, $\varepsilon_3^2 = -1$, $\varepsilon_3^3 = i$.

Теорема 46.5. *Корень ε n-й степени из единицы является первообразным корнем тогда и только тогда, когда его степени ε^k, $k = \overline{0, n-1}$, различны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ при $0 \leq k < l < n-1$. Тогда $\varepsilon^{l-k} = 1$, где $1 \leq l - k \leq n - 1$. Следовательно, ε является корнем из единицы меньшей степени, чем n.

Достаточность. Пусть ε – не первообразный корень. Тогда существует $k < n$ такое, что $\varepsilon^k = 1 = \varepsilon^0$ и степени $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ не будут различными. ■

Следствие 1. Корень ε n-й степени из единицы является первообразным корнем тогда и только тогда, когда он будет образующим циклической группы H всех корней n-й степени из единицы.

Следствие 2. Корень $\varepsilon_k \in H$ n-й степени из единицы является первообразным корнем тогда и только тогда, когда k и n взаимно просты (см. теорему 39.6).

Таким образом, число первообразных корней n-й степени из единицы равно числу целых положительных чисел k, меньших n и взаимно простых с ним. Если p – простое число, то первообразными корнями будут все корни, кроме единицы.

Глава X. Многочлены над произвольным полем

В §13 и 31 уже упоминались многочлены с вещественными коэффициентами в связи с линейными пространствами, а также в связи с алгебраическими линиями и поверхностями. В этой главе многочлены будут основным объектом изучения. Начнем с алгебраических (формальных) свойств многочленов без учета того, что многочлен является не только формальным выражением, но также и функцией.

§ 47. Кольцо многочленов

Пусть P – поле. *Многочленом (полиномом) n-й степени от переменной x над полем P* называется выражение

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \tag{47.1}$$

где a_i, $i = \overline{0,n}$, — фиксированные числа из поля P и $a_n \neq 0$. Эти числа называются *коэффициентами многочлена*, а число a_n — *старшим коэффициентом*. Число $0 \in P$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется *нулевым многочленом*. Степень нулевого многочлена не определена.

Многочлен обозначается символом $f(x)$ или $f_n(x)$, степень многочлена $f(x)$ – символом $\deg f$, множество всех многочленов от переменной x над полем P – символом $P[x]$. Итак,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in P[x], \quad \deg f = n.$$

Замечание 1. Выражения $x, x^2, \ldots, x^n$ не несут смысловой нагрузки (пока), они должны восприниматься как символы. Таким образом, на многочлен (47.1) следует смотреть как на некоторое формальное выражение, вполне определяемое набором своих коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$, где $a_n \neq 0$.

Два многочлена $f(x), g(x) \in P[x]$ называются *равными*, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

Обозначение: $f(x) = g(x)$. Из определения следует, что нулевой многочлен равен только нулевому многочлену, а для ненулевых многочленов $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{s} b_k x^k$ равенство $f(x) = g(x)$ означает, что

$$\deg f = \deg g = n; \qquad a_i = b_i, \ i = \overline{0,n}. \tag{47.2}$$

Равенство многочленов, определенное здесь, означает тождественное равенство, и мы будем называть его *формальным* в отличие от равенства многочленов как функций. В §49 будет доказана равносильность этих определений равенства.

Введем на множестве $P[x]$ алгебраические операции.

Суммой многочленов $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ и $g(x)=\sum_{k=0}^{s} b_k x^k$ называется многочлен

$$h(x)=\sum_{k=0}^{\max(n,s)} c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_k=a_k+b_k. \tag{47.3}$$

Здесь недостающие коэффициенты a_k или b_k заменяются нулями. Обозначение: $f(x)+g(x)$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Для любого многочлена $f(x)\in P[x]$

$$f(x)+0=0+f(x)=f(x). \tag{47.4}$$

2°. Для ненулевых многочленов $f(x)$, $g(x)$, $f(x)+g(x)$

$$\deg(f+g)\le \max(\deg f, \deg g). \tag{47.5}$$

3°. Если $f(x), g(x)\in P[x]$, то $f(x)+g(x)\in P[x]$, т.е. сложение многочленов является алгебраической операцией на множестве $P[x]$.

Произведением многочленов $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ и $g(x)=\sum_{k=0}^{s} b_k x^k$ называется многочлен

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n+s} c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j,\ k=\overline{0,n+s}. \tag{47.6}$$

Здесь суммирование в $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ ведется по всевозможным индексам i и j, для которых $i+j=k$. Обозначение: $f(x)g(x)$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Произведение ненулевых многочленов не может быть нулевым, при этом

$$\deg fg=\deg f+\deg g. \tag{47.7}$$

2°. Если $f(x), g(x)\in P[x]$, то $f(x)g(x)\in P[x]$, т.е. умножение многочленов является алгебраической операцией на множестве $P[x]$.

3°. Операция умножения многочленов порождает операцию умножения многочлена на число из поля P как частный случай умножения многочленов: если $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ и $\alpha\in P$, то

$$\alpha f(x)=\sum_{k=0}^{n} \alpha a_k x^k; \tag{47.8}$$

таким образом, на множестве $P[x]$ определен и внешний закон композиции.

Теорема 47.1. *Множество $P[x]$ всех многочленов над полем P является коммутативным кольцом с единицей и без делителей нуля.*

Доказательство. Проверим все аксиомы кольца (§42). Прежде всего отметим, что $P[x]$ – аддитивная абелева группа: коммутативность и ассоциативность сложения очевидны (в силу (47.3)), нулем является нулевой многочлен (как отмечено в (47.4)), противоположным к многочлену $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$, как легко проверить, является многочлен $-f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-a_k)x^k$. Коммутативность умножения следует из определения. Докажем ассоциативность умножения. Пусть $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$, $g_s(x)=\sum_{k=0}^{s}b_kx^k$, $h_p(x)=\sum_{k=0}^{p}c_kx^k$. Обозначим через α_k, β_k, γ_k и δ_k коэффициенты при x^k у многочленов $f(x)g(x)$, $g(x)h(x)$, $(f(x)g(x))h(x)$ и $f(x)(g(x)h(x))$ соответственно. Тогда в силу (47.6)

$$\gamma_k=\sum_{i+j=k}\alpha_ic_j=\sum_{i+j=k}\Bigl(\sum_{r+t=i}a_rb_t\Bigr)c_j=\sum_{r+t+j=k}a_rb_tc_j,$$

$$\delta_k=\sum_{r+i=k}a_r\beta_i=\sum_{r+i=k}a_r\Bigl(\sum_{t+j=i}b_tc_j\Bigr)=\sum_{r+t+j=k}a_rb_tc_j,$$

т.е. $\gamma_k=\delta_k$. Отсюда, если учесть, что $\deg(fg)h=\deg f(gh)=n+s+p$, следует равенство $(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$.

Роль единицы при умножении многочленов играет число 1, рассматриваемое как многочлен нулевой степени.

Справедливость аксиомы дистрибутивности вытекает из равенства $\sum_{i+j=k}(a_i+b_i)c_j=\sum_{i+j=k}a_ic_j+\sum_{i+j=k}b_ic_j$, так как левая часть этого равенства является коэффициентом при x^k в многочлене $(f(x)+g(x))h(x)$, а правая часть – коэффициентом при той же степени x в многочлене $f(x)h(x)+g(x)h(x)$.

Наконец, из (47.7) следует, что в $P[x]$ нет делителей нуля. ■

Следствие. Множество $P[x]$ является линейным пространством над полем P. Это следует из того, что любое кольцо по сложению – абелева группа; что же касается внешнего закона композиции (47.8), то его дистрибутивность относительно сложения является частным проявлением общего закона дистрибутивности в кольце $P[x]$, а справедливость других аксиом умножения на число очевидна.

Замечание 2. Произведение (47.6) многочленов $f(x)$ и $g(x)$ может быть получено обычным для элементарной алгебры перемножением двух сумм $(a_0+\dots+a_1x+\dots+a_nx^n)(b_0+b_1x+\dots+b_sx^s)$ с последующей группировкой одночленов одинаковой степени. Это следует из общего закона дистрибутивности и из того, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ можно рассматривать как суммы многочленов.

Замечание 3. Кольцо $P[x]$ не является полем, так как не всякий многочлен $f(x)\in P[x]$ обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$. Действительно, равенство $f(x)f^{-1}(x)=1$ с учетом (47.7) означает, что *многочлены нулевой степени, и только они, обладают обратными.*

§ 48. Деление многочленов

Кольцо $P[x]$ всех многочленов над полем P по своим свойствам близко к кольцу $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. Эта аналогия проявляется и в том, что для многочленов, как и для целых чисел, имеют место понятия деления нацело, деления с остатком, делителя, наибольшего общего делителя и др.

Теорема 48.1. *Для любых двух многочленов $f(x), g(x) \in P[x]$, где $g(x) \neq 0$, существует, и притом единственная, пара многочленов $q(x), r(x) \in P[x]$ такая, что:*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \text{где либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r < \deg g. \tag{48.1}$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Будем считать, что $f(x) \neq 0$, так как в противном случае можно положить $q(x) = 0$, $r(x) = 0$. Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{s} b_k x^k$, $\deg f = n$, $\deg g = s$. Без ограничения общности считаем, что $n \geq s$, так как в противном случае можно взять $q(x) = 0$ и $r(x) = f(x)$. Применим метод математической индукции по степени n многочлена $f(x)$, считая $g(x)$ фиксированным.

1. Пусть $n = 0$. Тогда $s = 0$ и $q(x) = a_0 b_0^{-1}$, $r(x) = 0$.

2. Пусть теперь теорема верна для любого многочлена степени меньшей n. Докажем ее для многочлена $f(x)$ степени $n \geq s$. Воспроизведем первый шаг известного из элементарной алгебры алгоритма деления многочленов с действительными коэффициентами, т.е. построим одночлен $\frac{a_n}{b_s} x^{n-s}$ и составим разность

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_s} x^{n-s} g(x). \tag{48.2}$$

Либо многочлен $f_1(x)$ равен 0, либо $\deg f_1 < n$. В первом случае можно положить $q(x) = \frac{a_n}{b_s} x^{n-s}$, $r(x) = 0$. Во втором случае для многочлена $f_1(x)$ по индуктивному предположению найдутся многочлены $q_1(x)$ и $r(x)$ такие, что $f_1(x) = g(x)q_1(x) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r < \deg g$. Тогда, согласно (48.2), $f(x) = \frac{a_n}{b_s} x^{n-s} g(x) + g(x)q_1(x) + r(x)$. Положив $q(x) = \frac{a_n}{b_s} x^{n-s} + q_1(x)$, приходим к паре многочленов $q(x), r(x) \in P[x]$, удовлетворяющей условиям (48.1).

Остается доказать единственность. Пусть существует еще одна пара многочленов $q_1(x), r_1(x) \in P[x]$, удовлетворяющая условиям (48.1). Тогда $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, т.е.

$$g(x)(q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x). \tag{48.3}$$

Если $r_1(x) - r(x) \neq 0$, то и $q(x) - q_1(x) \neq 0$, при этом степень правой части равенства (48.3) меньше s (в силу (47.5) и (48.1)), а левой части – не меньше s (в силу (47.7)), что невозможно. Следовательно, $r_1(x) - r(x) = 0$, а так как в кольце $P[x]$ нет делителей нуля, то и $q(x) - q_1(x) = 0$. Таким образом, $r(x) = r_1(x)$ и $q(x) = q_1(x)$. ■

Заметим, что доказанная теорема очень похожа на соответствующую теорему о делимости целых чисел. По аналогии с целыми числами многочлен $q(x)$ называется *частным* (или *неполным частным*) от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ – *остатком* от этого деления. Если $r(x) = 0$, то говорят, что $f(x)$ *делится* (или *нацело делится*) на $g(x)$, при этом $g(x)$ называется *делителем* $f(x)$. Очевидно, делителями любого многочлена $f(x)$ будут все многочлены нулевой степени и все многочлены вида $\alpha f(x)$, где $\alpha \neq 0$.

Многочлен $\varphi(x)$ называется *общим делителем* многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он является делителем каждого из них. Очевидно, все многочлены нулевой степени – общие делители любой пары многочленов. Многочлены, не имеющие других общих делителей, кроме многочленов нулевой степени, называются *взаимно простыми*.

Многочлен $d(x)$ называется *наибольшим общим делителем* ненулевых многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если:

1) $d(x)$ – общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$;

2) $d(x)$ делится на любой общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Обозначение: НОД(f, g). Очевидно, если $d(x) = $ НОД(f, g), то $\alpha d(x) = $ НОД(f, g) для любого $\alpha \neq 0$.

Теорема 48.2. *Для любой пары ненулевых многочленов $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ существует наибольший общий делитель. Он определен однозначно с точностью до множителя нулевой степени.*

Доказательство. Приведем описание алгоритма построения НОД(f, g), называемого *алгоритмом Евклида* или *алгоритмом последовательного деления*. Он состоит в следующем.

Выполним цепочку делений с остатком согласно теореме 48.1:

$$\left\{\begin{array}{rcll} f(x) &=& g(x)q_1(x) + r_1(x), & \deg r_1 < \deg g, \\ g(x) &=& r_1(x)q_2(x) + r_2(x), & \deg r_2 < \deg r_1, \\ r_1(x) &=& r_2(x)q_3(x) + r_3(x), & \deg r_3 < \deg r_2, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ r_{k-3}(x) &=& r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), & \deg r_{k-1} < \deg r_{k-2}, \\ r_{k-2}(x) &=& r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x), & \deg r_k < \deg r_{k-1}, \\ r_{k-1}(x) &=& r_k(x)q_{k+1}(x). & \end{array}\right. \tag{48.4}$$

Степени остатков понижаются, поэтому процесс оборвется в тот момент, когда деление выполнится нацело. Пусть $r_k(x)$ – последний отличный от нуля остаток. Покажем, что $r_k(x) = $ НОД(f, g). Действительно, просматривая равенства (48.4) снизу вверх, заключаем, что $r_k(x)$ является делителем $r_{k-1}(x)$, $r_{k-2}(x)$, ... , $r_1(x)$, $g(x)$, $f(x)$, т.е. общим делителем $f(x)$ и $g(x)$. Просматривая равенства (48.4) сверху

вниз, заключаем, что все остатки $r_1(x)$, $r_2(x)$, ... , $r_k(x)$ делятся на любой общий делитель $f(x)$ и $g(x)$.

Докажем вторую часть теоремы. Положим $d_1(x) = \text{НОД}(f,g)$, $d_2(x) = \text{НОД}(f,g)$. Тогда, согласно определению НОД(f,g), $d_1(x) = d_2(x)q_1(x)$, $d_2(x) = d_1(x)q_2(x)$ и, с учетом (47.7), $\deg d_1 \geq \deg d_2$, $\deg d_2 \geq \deg d_1$. Следовательно, $\deg d_1 = \deg d_2$ и многочлены $d_1(x)$ и $d_2(x)$ отличаются лишь множителем нулевой степени. ■

§ 49. Корни многочленов

До сих пор мы рассматривали многочлен как формально-алгебраическое выражение. Вместе с тем многочлен $f(x)$ можно рассматривать и как функцию от переменной x. Если $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ – многочлен над полем P, c – некоторое число из поля P, то число $f(c) = \sum_{k=0}^{n} a_k c^k$ называется *значением многочлена* $f(x)$ *при* $x = c$.

Известно (из теории функций), что две функции называются равными, если их значения равны при всех значениях переменной. Очевидно, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны как многочлены (см. (47.2)), то они равны и как функции. Однако обратное утверждение потребует дополнительных исследований и будет доказано позже. Пока же, забегая вперед, будем иметь в виду, что оба подхода к понятию равенства многочленов совпадают.

То же относится и к операциям над многочленами: сложение и умножение многочленов, определенные в §47, превращаются в сложение и умножение функций, так как если $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, $\psi(x) = f(x)g(x)$, то $\varphi(c) = f(c) + g(c)$, $\psi(c) = f(c)g(c)$, $\forall c \in P$.

Корнем многочлена $f(x) \in P[x]$ называется число $c \in P$ такое, что $f(c) = 0$.

Теорема 49.1 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на* $x - c$ *равен* $f(c)$.

Доказательство. Разделим согласно теореме 48.1 многочлен $f(x)$ на многочлен $x - c$. Тогда $f(x) = (x - c)q(x) + r(x)$, где $\deg r < \deg(x - c) = 1$, так что $r(x) = r$ – константа. Рассматривая значения обеих частей этого равенства при $x = c$, получим, что $r = f(c)$. ■

Следствие. Число $c \in P$ *является корнем многочлена* $f(x) \in P[x]$ *тогда и только тогда, когда многочлен* $f(x)$ *делится на* $x - c$ *в кольце* $P[x]$.

Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$. До сих пор все поля мы считали равноправными. Однако в вопросе существования корней многочлена это далеко не так. Поле P называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен $f(x) \in P[x]$ степени $n \geq 1$ обладает в P хотя бы одним корнем. Очевидно, что поле действительных чисел $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым, так как многочлен $x^2 + 1$ не имеет действительных корней.

Теорема 49.2 (основная теорема алгебры). *Поле* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел алгебраически замкнуто.*

Эта теорема называется "основной" по традиции, установившейся с тех времен, когда проблема решения алгебраических уравнений была главной проблемой в алгебре (впервые теорема доказана Гауссом в 1799 г. для частного случая). Теперь же она относится к числу рядовых утверждений, хотя и очень важных. Во всяком случае, на ней основана вся дальнейшая теория многочленов. И тем не менее эта теорема не является чисто алгебраической. Все ее доказательства (а их после Гаусса найдено довольно много) в той или иной мере опираются на другие разделы математики. Мы приведем одно из них, наиболее алгебраическое из доступных нам. Для этого потребуются дополнительные понятия и факты.

В приводимых ниже леммах, если не оговаривается особо, $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ – многочлен над полем комплексных чисел от комплексной переменной z.

Лемма 1. *Пусть* $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ *– многочлен с нулевым свободным членом. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для всех* z*, для которых* $|z| < \delta$*, выполняется неравенство* $|f(z)| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $|z| < 1$. Тогда в силу (45.4) и (45.3)

$$|f(z)| = |z|\,|a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1}| \le |z|\,(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|).$$

Положим $M = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ и возьмем $\delta = \min(1, \varepsilon/M)$. Тогда для всех z, для которых $|z| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z)| \le |z| \cdot M < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon$. ■

Комплексная функция $f(z)$ от комплексной переменной z называется *непрерывной в точке* z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех z, для которых $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Лемма 2. *Многочлен* $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *есть непрерывная функция во всех точках комплексной плоскости.*

Доказательство. Пусть z_0 – произвольное комплексное число. Разложим многочлен $f(z)$ по степеням $z - z_0$: $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n$. Тогда $c_0 = f(z_0)$, так что $f(z) - f(z_0) = c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n$.

Правая часть этого равенства представляет собой многочлен от $z - z_0$ с нулевым свободным членом. По лемме 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ для всех z, для которых $|z - z_0| < \delta$. ■

Лемма 3. *Модуль многочлена есть непрерывная функция.*

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 2 и свойств модуля комплексных чисел (45.3): $|f(z) - f(z_0)| \ge ||f(z)| - |f(z_0)||$. ■

Лемма 4. *Если* $f(z)$ *– многочлен степени* $n \ge 1$*, то для любого* $M > 0$ *существует* $R > 0$ *такое, что для всех* z*, для которых* $|z| > R$*, выполняется неравенство* $|f(z)| > M$.

Доказательство. Пусть $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n}\right) = \\ = a_n z^n \left(1 + g(z^{-1})\right), \quad (49.1)$$

где $g(z^{-1})$ – многочлен от z^{-1} с нулевым свободным членом. В силу леммы 1 для $\varepsilon = 1/2$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|z^{-1}| < \delta$ имеет место неравенство $|g(z^{-1})| < 1/2$. Модуль $a_n z^n$ может быть сделан сколь угодно большим, именно при $|z| > \sqrt[n]{2M/|a_n|}$ будет $|a_n z^n| > 2M$. Возьмем $R = \max\left(\sqrt[n]{2M/|a_n|}, \frac{1}{\delta}\right)$. Тогда если $|z| > R$, то $|z^{-1}| < \delta$ и $|z| > \sqrt[n]{2M/|a_n|}$, так что согласно (49.1)

$$|f(z)| = |a_n z^n|\,|1 + g(z^{-1})| \geq |a_n z^n|\,|1 - |g(z^{-1})|| > 2M(1 - \tfrac{1}{2}) = M. \quad \blacksquare$$

Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности* $z_n = x_n + iy_n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что $|z_n - z_0| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Очевидно, что сходимость последовательности комплексных чисел z_n равносильна сходимости двух последовательностей действительных чисел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Последовательность z_n называется *ограниченной*, если существует число $R > 0$ такое, что $|z_n| \leq R$.

Лемма 5. *Из любой ограниченной последовательности z_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $z_n = x_n + iy_n$ и $|z_n| \leq R$; тогда $|x_n| \leq R$, так что x_n – ограниченная последовательность действительных чисел. Из нее согласно теореме Больцано–Вейерштрасса [11] можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$. Рассмотрим соответствующую подпоследовательность мнимых частей y_{n_k}. Она ограничена, и из нее также можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{n_{k_m}} \to y_0$. Тогда соответствующая подпоследовательность $z_{n_{k_m}}$ сходится к $z_0 = x_0 + iy_0$. $\blacksquare$

Лемма 6. *Точная нижняя грань модуля многочлена достижима, т.е. существует число z_0 такое, что $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ при всех комплексных z.*

Доказательство. Рассмотрим множество всевозможных значений модуля многочлена $f(z)$. Так как $|f(z)| \geq 0$, то это множество ограничено снизу и, следовательно, имеет точную нижнюю грань. Обозначим ее через m. Тогда для любого натурального числа n можно найти комплексное число z_n такое, что

$$|f(z_n)| \leq m + \frac{1}{n}. \quad (49.2)$$

Воспользуемся леммой 4: для $M = m + 1$ найдем R такое, что при $|z| > R$ будет $|f(z)| > M \geq m + \frac{1}{n}$. Отсюда и из (49.2) следует, что

$|z_n| \leq R$. Последовательность z_n оказалась ограниченной, и из нее согласно лемме 5 можно выделить сходящуюся подпоследовательность $z_{n_k} \to z_0$. Тогда в силу непрерывности $|f(z)|$ (лемма 3)

$$\lim_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = |f(z_0)|. \tag{49.3}$$

С другой стороны, из (49.2) и определения нижней грани имеем $m \leq |f(z_{n_k})| \leq m + \frac{1}{n_k}$, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = m. \tag{49.4}$$

Сопоставляя (49.3) и (49.4), приходим к требуемому равенству

$$|f(z_0)| = m. \blacksquare$$

Лемма 7 (лемма Даламбера). *Если $f(z)$ – многочлен степени $n \geq 1$ и $f(z_0) \neq 0$, то найдется число z_1 такое, что $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.*

Доказательство. Разложим многочлен $f(z)$ по степеням $z - z_0$:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n. \tag{49.5}$$

Очевидно, что $c_0 = f(z_0) \neq 0$. Пусть c_k – первый ненулевой коэффициент в (49.5) после c_0 (такой коэффициент имеется, так как $f(z)$ не константа). Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots + c_n(z - z_0)^n = \\ &= c_0\Big(1 + \frac{c_k}{c_0}(z - z_0)^k + \frac{c_k}{c_0}(z - z_0)^k\Big(\frac{c_{k+1}}{c_k}(z - z_0) + \cdots + \frac{c_n}{c_k}(z - z_0)^{n-k}\Big)\Big) = \\ &= c_0\Big(1 + \frac{c_k}{c_0}(z - z_0)^k + \frac{c_k}{c_0}(z - z_0)^k g(z - z_0)\Big), \end{aligned} \tag{49.6}$$

где $g(z - z_0) = \frac{c_{k+1}}{c_k}(z - z_0) + \cdots + \frac{c_n}{c_k}(z - z_0)^{n-k}$ – многочлен от $z - z_0$ с нулевым свободным членом. Согласно лемме 1 для $\varepsilon = 1/2$ найдется такое δ, что если $|z - z_0| < \delta$, то

$$|g(z - z_0)| < 1/2. \tag{49.7}$$

Оценим правую часть (49.6). Пусть $\frac{c_k}{c_0} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z - z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Выберем r так, чтобы $Rr^k < 1$. Для этого нужно взять $r < \sqrt[k]{1/R}$. Далее положим $\theta + k\varphi = \pi$, т.е. возьмем $\varphi = (\pi - \theta)/k$. При таком выборе имеем $\frac{c_k}{c_0}(z - z_0)^k = -Rr^k$. Теперь положим $z_1 = z_0 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ при $r < \min(\delta, \sqrt[k]{1/R})$ и $\varphi = (\pi - \theta)/k$. Тогда из (49.6)

следует, что $f(z_1) = c_0\left(1 - Rr^k - Rr^k g(z_1 - z_0)\right)$, откуда

$$|f(z_1)| = |c_0|\left|1 - Rr^k - Rr^k g(z_1 - z_0)\right| \leq$$
$$\leq |c_0|\left(|1 - Rr^k| + Rr^k|g(z_1 - z_0)|\right) \leq \{\text{в силу выбора } r \text{ и } (49.7)\} \leq$$
$$\leq |c_0|\left(1 - Rr^k + Rr^k/2\right) = |c_0|\left(1 - Rr^k/2\right) < |c_0| = |f(z_0)|. \blacksquare$$

Доказательство основной теоремы. Пусть $f(z)$ – произвольный многочлен степени $n \geq 1$ над полем $\mathbb{C}$ от комплексной переменной z. Согласно лемме 6 множество всевозможных значений $|f(z)|$ имеет точную нижнюю грань m, которая достигается в некоторой точке z_0, так что $|f(z_0)| = m$. Тогда $f(z_0) = 0$, так как в противном случае, если $|f(z_0)| \neq 0$, то согласно лемме 7 найдется точка z_1, для которой $|f(z_1)| < |f(z_0)| = \inf|f(z)|$, что невозможно. Таким образом, z_0 – корень $f(z)$ и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто. ■

§ 50. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел

Теорема 50.1. *Для любого многочлена* $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ *степени* $n \geq 1$ *существуют числа* $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$f(z) = a_n(z - c_1)(z - c_2)\ldots(z - c_n). \tag{50.1}$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. Из алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$ следует существование корня $c_1 \in \mathbb{C}$ многочлена $f(z)$. Тогда в кольце $\mathbb{C}[z]$ многочлен $f(z)$ делится (теорема 49.1) на многочлен $z - c_1$, так что $f(z) = (z - c_1)f_1(z)$, где $f_1(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg f_1 = n - 1$. Если $n - 1 \geq 1$, то к многочлену $f_1(z)$ также применима основная теорема алгебры и, следовательно, $f(z) = (z - c_1)(z - c_2)f_2(z)$, где $f_2(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg f_2 = n - 2$, $c_2 \in \mathbb{C}$. Применив эти рассуждения n раз, найдем числа $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ такие, что

$$f(z) = (z - c_1)(z - c_2)\ldots(z - c_n)f_n, \tag{50.2}$$

где $\deg f_n = 0$ и, следовательно, f_n – константа. Сравнив коэффициенты при z^n в обеих частях равенства (50.2), получим, что $f_n = a_n$. Тем самым доказано существование разложения (50.1).

Докажем его единственность. Пусть существует другое разложение:

$$f(z) = a_n(z - d_1)(z - d_2)\ldots(z - d_n). \tag{50.3}$$

Каждое число c_i из первого разложения встречается среди чисел $d_1, \ldots, d_n$ второго разложения, так как в противном случае для $c_i \neq d_j$, $j = \overline{1,n}$, из (50.1) получим, что $f(c_i) = 0$, а из (50.3) – что

$f(c_i) \neq 0$. Аналогично каждое число d_j встречается в первом разложении.

Покажем теперь, что если $c_i = d_j$, то c_i встречается в (50.1) столько же раз, сколько d_j в (50.3). Пусть c_i равно d_j и встречается в (50.1) k раз, а в (50.3) – m раз и пусть $k > m$. Положим $(z - c_i)^m = \varphi(z)$. Тогда

$$\varphi(z)(z - c_i)^{k-m} \prod_{c_s \neq c_i} (z - c_s) = \varphi(z) \prod_{d_s \neq d_j} (z - d_s),$$

откуда следует, что

$$\varphi(z)\left((z - c_i)^{k-m} \prod_{c_s \neq c_i} (z - c_s) - \prod_{d_s \neq d_j} (z - d_s)\right) = 0.$$

Так как в кольце $\mathbb{C}[z]$ нет делителей нуля и $\varphi(z) \neq 0$, то

$$(z - c_i)^{k-m} \prod_{c_s \neq c_i} (z - c_s) = \prod_{d_s \neq d_j} (z - d_s).$$

Положив в этом равенстве $z = c_i$, придем к противоречию. Итак, $k \leq m$. Аналогично показывается, что $m \leq k$. Значит, $k = m$. ■

Теорема 50.2 (о каноническом разложении многочлена над полем $\mathbb{C}$). *Для любого многочлена $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, где $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$, и числа $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, где $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, такие, что*

$$f(z) = a_n(z - c_1)^{k_1}(z - c_2)^{k_2} \ldots (z - c_m)^{k_m}. \tag{50.4}$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. Рассмотрим разложение (50.1) для многочлена $f(z)$. Среди чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ могут быть одинаковые. Будем считать, что $c_1, c_2, \ldots, c_m$ различны, а каждое из $c_{m+1}, \ldots, c_n$ равно одному из $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Объединив одинаковые сомножители в этом разложении, получим

$$f(z) = a_n(z - c_1)^{k_1}(z - c_2)^{k_2} \ldots (z - c_m)^{k_m},$$

где $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$ по построению, а $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, так как $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ – это число всех сомножителей в (50.1). Единственность разложения следует из теоремы 50.1. ■

Разложение (50.4) называется *каноническим разложением многочлена над полем комплексных чисел.*

Заметим, что числа c_i, $i = \overline{1, m}$, в каноническом разложении (50.4) являются корнями многочлена $f(z)$ (так как $f(c_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$) и других корней этот многочлен не имеет (так как $f(\alpha) \neq 0$ для любого

числа $\alpha \neq c_i$, $i = \overline{1,m}$). Число k_i в каноническом разложении многочлена называется *кратностью корня* c_i. Если $k_i = 1$, то корень c_i называется *простым*, если $k_i > 1$ – *кратным*.

Следствие 1. *Любой многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Замечание 1. Это утверждение применимо и к многочлену нулевой степени, оно неприменимо лишь к нулевому многочлену, для которого любое число $z \in \mathbb{C}$ является корнем.

Вернемся к вопросу о равносильности двух определений равенства многочленов, о котором шла речь в начале §49.

Теорема 50.3. *Если два многочлена $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, степени которых не превосходят $n \geq 1$, имеют равные значения при более чем n различных значениях переменной, то они равны.*

Доказательство. Действительно, многочлен $h(z) = f(z) - g(z) \in \mathbb{C}[z]$ имеет более n различных корней. Но $\deg h \leq n$, поэтому $h(z) = 0$. ■

Следствие 2. *Два многочлена $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$ равны тогда и только тогда, когда совпадают их значения при всех значениях переменной z.*

Следствие 3. *Многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ однозначно определяется своими значениями в $n+1$ различных точках.*

Нетрудно показать, что если многочлен $f(z)$ в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, где $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, принимает значения $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{n+1})$, то

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\alpha_i) \frac{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{i-1})(z-\alpha_{i+1})\ldots(z-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}.$$

Этот многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Теорема 50.4 (формулы Виета). *Если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – корни многочлена $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, то*

$$\begin{aligned}
a_{n-1}/a_n &= -(c_1 + c_2 + \cdots + c_n),\\
a_{n-2}/a_n &= +(c_1c_2 + c_1c_3 + \cdots + c_1c_n + c_2c_3 + \cdots + c_{n-1}c_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-k}/a_n &= (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_0/a_n &= (-1)^n c_1c_2\ldots c_n.
\end{aligned} \tag{50.5}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a_n = 1$, так как многочлены $f(z)$ и $(1/a_n)f(z)$ имеют одинаковые корни. Применим индукцию по n. Для $n = 2$ формулы (50.5) являются известными из элементарной алгебры формулами Виета. Пусть для многочленов $(n-1)$-й степени формулы (50.5) имеют место, докажем их для многочлена $f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$. Согласно (50.1)

$$f(z) = ((z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{n-1}))(z-c_n) = g(z)(z-c_n),$$

где $g(z) = (z - c_1)(z - c_2)\dots(z - c_{n-1})$ – многочлен степени $n-1$. Пусть $g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-2}z^{n-2} + z^{n-1}$, тогда

$$f(z) = (b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-2}z^{n-2} + z^{n-1})(z - c_n) =$$
$$= b_0 z + b_1 z^2 + \dots + b_{n-2}z^{n-1} + z^n - (b_0 c_n + b_1 c_n z + \dots + b_{n-2}c_n z^{n-2} +$$
$$+ c_n z^{n-1}) = -b_0 c_n + (b_0 - b_1 c_n)z + \dots + (b_{n-k-1} - b_{n-k}c_n)z^{n-k} + \dots + z^n$$

и $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-k}z^{n-k} + \dots + z^n$. Сравним коэффициенты при z^{n-k} и учтем, что для коэффициентов b_i, $i = \overline{0, n-2}$, верны соотношения (50.5), т.е. $b_{(n-1)-k} = (-1)^k \sum{}' c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}$, где суммирование в $\sum'$ ведется по всем $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n-1$. Тогда

$$a_{n-k} = b_{n-k-1} - b_{n-k}c_n = b_{(n-1)-k} - b_{(n-1)-(k-1)}c_n =$$
$$= (-1)^k \sum{}' c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} - (-1)^{k-1} c_n \sum{}' c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_{k-1}} =$$
$$= (-1)^k \left(\sum{}' c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} + c_n \sum{}' c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_{k-1}}\right) =$$
$$= (-1)^k \sum c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k},$$

где суммирование ведется по всем $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$. ■

Замечание 2. Все утверждения этого параграфа имеют место в любом алгебраически замкнутом поле.

Формулы Виета примечательны тем, что их правые части представляют собой такие многочлены от переменных $c_1, \dots, c_n$, которые не меняются ни при какой перестановке корней $c_1, \dots, c_n$ Такие многочлены называются *симметрическими многочленами* (или симметрическими функциями). Следующие n симметрических многочленов от n неизвестных называются *элементарными симметрическими многочленами*:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$
$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_{n-k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Таким образом, коэффициенты многочлена от одной переменной, имеющего старшим коэффициентом единицу, являются с точностью до знака симметрическими многочленами от его корней.

§ 51. Многочлены над полем вещественных чисел

Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ – многочлен над полем $\mathbb{R}$ степени n, т.е. $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n}$, и $a_n \neq 0$. Так как $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то многочлен $f(x)$ можно рассматривать и как многочлен над полем $\mathbb{C}$. Тогда, как показано в §50, этот многочлен с учетом кратностей имеет n корней (вообще говоря, комплексных).

Теорема 51.1. *Если c – комплексный (и не действительный) корень многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, то и $\overline{c}$ является корнем этого многочлена.*

Доказательство. Если c является корнем многочлена $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, то $a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n = 0$. Взяв сопряжение от обеих частей этого равенства, получим с учетом теоремы 44.2 и соотношения $\overline{a}_k = a_k$, $k = \overline{0,n}$, что $a_0 + a_1\overline{c} + \cdots + a_n\overline{c}^n = 0$. ■

Положим $\varphi(x) = (x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - (c+\overline{c})x + |c|^2$. Очевидно, $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Теорема 51.2. *Если c – комплексный (и не действительный) корень многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, то в кольце $\mathbb{R}[x]$ многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$.*

Доказательство. Разделим многочлен $f(x)$ на $\varphi(x)$ в кольце $\mathbb{R}[x]$ согласно (48.1), тогда $f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x)$, где $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Это же разложение можно рассматривать как результат деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ в кольце $\mathbb{C}[x]$. Но в кольце $\mathbb{C}[x]$ многочлен $f(x)$ делится нацело на $\varphi(x)$, так как c и $\overline{c}$ являются корнями $f(x)$. Отсюда и из единственности результата деления (теорема 48.1) следует, что $f(x) = \varphi(x)q(x)$, где $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. ■

Теорема 51.3. *Кратности корней c и $\overline{c}$ многочлена с вещественными коэффициентами совпадают.*

Доказательство. Пусть c и $\overline{c}$ – корни многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ кратностей m и k соответственно. Покажем, что $k \le m$. Пусть $k > m$. Тогда, согласно теореме 51.2, $f(x) = (\varphi(x))^m q(x)$, где $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Но $q(c) = 0$, а $q(\overline{c}) \ne 0$, что невозможно в силу теоремы 51.1. Значит, $k \le m$. Аналогично можно показать, что $m \le k$. Следовательно, $k = m$. ■

Следствие. Многочлен с вещественными коэффициентами нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.

Теорема 51.4 (о каноническом разложении многочлена над полем $\mathbb{R}$). *Для любого многочлена $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ степени $n \ge 1$ существуют числа $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, где $c_i \ne c_j$ при $i \ne j$; числа $p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$, где $(p_i, q_i) \ne (p_j, q_j)$ при $i \ne j$; числа $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ и $l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$, где $\sum_{i=1}^{r} k_i + 2\sum_{j=1}^{s} l_j = n$, такие, что*

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{r} (x - c_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}. \tag{51.1}$$

Доказательство. Используем каноническое разложение (50.4) многочлена $f(x)$, рассматривая $f(x)$ как многочлен с комплексными коэффициентами:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} \ldots (x - c_m)^{k_m}, \tag{51.2}$$

где $c_i \ne c_j$ при $i \ne j$ и $k_1 + \cdots + k_m = n$. Числа $c_1, \ldots, c_m$ являются комплексными корнями $f(x)$. Среди этих корней могут быть и действительные. Пусть $c_1, \ldots, c_r$ – действительные корни, а $c_{r+1}, \ldots, c_m$ –

комплексные (не действительные). Тогда среди $c_{r+1}, \ldots, c_m$ вместе с каждым корнем c_j находится и сопряженный ему корень $c_i = \overline{c}_j$, причем той же кратности, так что $k_i = k_j = l_j$ и, следовательно, $2l_j = k_i + k_j$. Объединим в (51.2) пару сомножителей:

$$(x - c_j)^{k_j}(x - c_i)^{k_i} = ((x - c_j)(x - \overline{c}_j))^{l_j} = (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j},$$

где $p_j = -(c_j + \overline{c_j}) \in \mathbb{R}$, $q_j = c_j\overline{c_j} \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(x - c_{r+1}) \ldots (x - c_m) = (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}$$

и разложение (51.2) перейдет в (51.1), причем $k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_s) = k_1 + \cdots + k_r + k_{r+1} + \cdots + k_m = n$. ■

Разложение (51.1) называется *каноническим разложением многочлена над полем вещественных чисел.*

Замечание. Теорема 50.3 и ее следствия справедливы и для многочленов с вещественными коэффициентами. В этом можно убедиться, если рассматривать их как многочлены с комплексными коэффициентами. Формулы Виета справедливы лишь для тех многочленов из $\mathbb{R}[x]$, которые имеют полный набор действительных корней.

Глава XI. Алгебраические линии второго порядка на плоскости

§ 52. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек M плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости есть постоянное число, большее, чем расстояние между F_1 и F_2. Это число обозначим через $2a$. Точки F_1, F_2 называются *фокусами эллипса*, расстояние между ними называется *фокусным расстоянием* и обозначается через $2c$. Числа $r_1 = \rho(M, F_1)$ и $r_2 = \rho(M, F_2)$ называются *фокальными радиусами* точки M.

Из определения эллипса следует, что точка M плоскости является точкой эллипса тогда и только тогда, когда

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad a > c. \tag{52.1}$$

Каноническое уравнение. Запишем условие (52.1) в координатной форме. Для этого введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy, приняв за начало O середину отрезка F_1F_2, за ось Ox – прямую F_1F_2, ориентированную от F_1 к F_2; ориентацию на оси Oy выбираем произвольно (рис. 1). Эта система координат называется *канонической системой координат* (для данного эллипса).

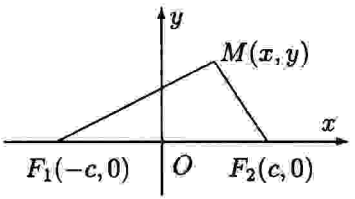


Рис. 1

Фокусы F_1 и F_2 в канонической системе координат имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно.

Теорема 52.1. *Уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0. \tag{52.2}$$

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ – точка эллипса (52.1). Тогда условие (52.1) может быть записано через координаты точек F_1, F_2, M в виде

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \quad a > c.$$

После переноса одного слагаемого в правую часть и возведения в квадрат получим

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$

или, после очевидных преобразований,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Еще раз возведем в квадрат: $a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$ или $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$, где $a^2-c^2>0$.

Разделив обе части уравнения на $a^2(a^2-c^2)$, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1, \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$, $a\geq b>0$. Таким образом, любая точка $M(x,y)$ эллипса удовлетворяет уравнению (52.2). Обратное утверждение, вообще говоря, не очевидно, так как при переходе от (52.1) к (52.2) мы дважды возводили в квадрат обе части уравнений и поэтому на линии, определяемой уравнением (52.2), могут быть и "лишние" точки. Покажем, что уравнению (52.2) отвечают только точки эллипса (52.1). Пусть точка $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению (52.2), тогда

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \quad \text{и} \quad |x|\leq a. \tag{52.3}$$

Найдем фокальные радиусы точки M. Имеем

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2}+2cx+c^2+b^2}=\sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2}+2cx+a^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{xc}{a}+a\right)^2}=\left|\frac{xc}{a}+a\right|=a+\frac{cx}{a},$$

так как $\dfrac{|cx|}{a}\leq\dfrac{ca}{a}=c<a$ в силу (52.3). Итак,

$$r_1=a+\frac{cx}{a}. \tag{52.4}$$

Аналогично доказывается, что

$$r_2=a-\frac{cx}{a}. \tag{52.5}$$

Из (52.4) и (52.5) следует, что $r_1+r_2=2a$. ■

Уравнение (52.2) называется *каноническим уравнением эллипса*. В случае, когда $a = b$ (т.е. фокусы совпадают), эллипс превращается в окружность радиуса a с центром в точке $O = F_1 = F_2$.

Из канонического уравнения вытекают следующие свойства эллипса.

1°. Координатные оси канонической системы координат (рис. 2) являются осями симметрии эллипса, так как вместе с точкой $M(x, y)$ эллипса точки $M_1(-x, y)$ и $M_2(x, -y)$ также принадлежат эллипсу. Начало координат канонической системы координат является центром симметрии эллипса, так как точки $M(x, y)$ и $M_3(-x, -y)$ одновременно принадлежат эллипсу. Начало координат канонической системы координат называется *центром* эллипса, числа $2a$ и $2b$ – *большой* и *малой осями эллипса*, а числа a и b – *большой* и *малой полуосями*.

2°. Все точки эллипса лежат в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$, так как для координат (x, y) точек эллипса $|x| \le a$, $|y| \le b$. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса*.

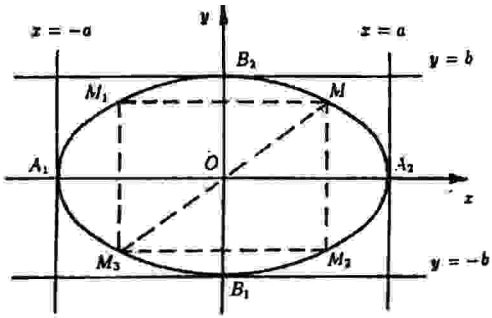


Рис. 2

3°. Исследуем форму эллипса. В силу симметрии достаточно провести это исследование лишь для точек I четверти. Здесь уравнение эллипса имеет вид $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$. Легко показать, что:

а) $y(x)$ непрерывна и убывает от $y = b$ до $y = 0$;

б) $y'(0) = 0$, $y'(a) = \infty$, следовательно, касательная к эллипсу в точке $x = 0$ параллельна оси Ox, а в точке $x = a$ – оси Oy;

в) $y''(x) < 0$, следовательно, линия выпукла вверх (рис. 2).

Простой *способ построения эллипса* дается определением эллипса: достаточно нить длиной $2a$ закрепить концами в точках F_1 и F_2, натянуть нить карандашом и передвигать карандаш, держа нить натянутой.

Директориальное свойство. Число $\varepsilon = c/a$ называется *эксцентриситетом эллипса*. Из определения следует, что $0 \le \varepsilon < 1$, при

этом

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \tag{52.6}$$

и, с учетом (52.4), (52.5),

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{52.7}$$

Соотношения (52.6) означают, что чем меньше эксцентриситет, тем эллипс "ближе" к окружности (для окружности $\varepsilon = 0$).

Для эллипса, не являющегося окружностью, две прямые d_1 и d_2, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$d_1 : \ x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad d_2 : \ x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами эллипса* (рис. 3).

Директриса d_i называется *соответствующей фокусу* F_i, $i = 1, 2$.

Теорема 52.2. *Эллипс, не являющийся окружностью, есть геометрическое место точек M плоскости, для которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через эту точку, равно данному положительному числу, меньшему 1, т.е.*

$$\frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)} = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{52.8}$$

Доказательство. Пусть $\rho(F, d) = m$. Найдем число $a > 0$, для которого

$$m = \frac{a}{\varepsilon} - a\varepsilon. \tag{52.9}$$

Очевидно, $a = \dfrac{m\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$. Положим

$$c = a\varepsilon, \quad b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2). \tag{52.10}$$

Введем прямоугольную декартову систему координат Oxy, принимая за ось Ox прямую, проходящую через точку F, перпендикулярную прямой d (рис. 4) и ориентированную от F к d; за начало O – точку на оси Ox, расположенную от точки F на расстоянии c по другую сторону от прямой d; ориентация на оси Oy выбирается произвольно.

В этой системе координат точка F имеет координаты $(c, 0)$, а прямая d определяется уравнением $x = a/\varepsilon$, так как $c + m = a\varepsilon + m = a/\varepsilon$ (рис. 4). Условие (52.8) для точки $M(x, y)$ означает, что

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| \varepsilon.$$

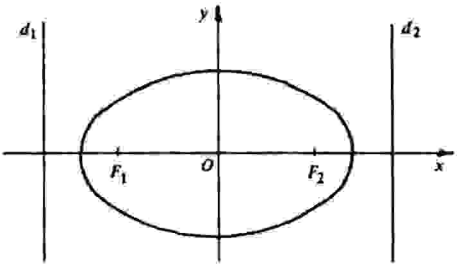


Рис. 3

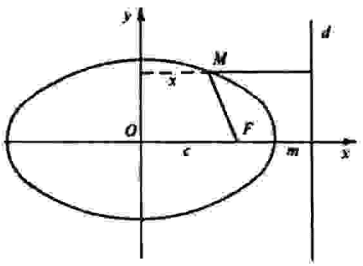


Рис. 4

Возведя обе части в квадрат, получим равносильное уравнение

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2\varepsilon^2 - 2xa\varepsilon + a^2,$$

которое с учетом того, что $c = a\varepsilon$, может быть записано в виде

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2).$$

Разделив обе части этого уравнения на правую часть, приходим в обозначениях (52.10) к каноническому уравнению эллипса, эквивалентному (52.8):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

Итак, точка $M(x, y)$ принадлежит геометрическому месту точек (52.8) тогда и только тогда, когда она является точкой эллипса, для которого данная точка F является фокусом, прямая d – соответствующей директрисой, а число ε – эксцентриситетом. Отметим, что доказательство теоремы как раз и состоит в построении этого эллипса. Его полуоси a и b определены равенствами (52.9), (52.10). ■

§ 53. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний от двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости есть постоянное положительное число, меньшее, чем расстояние между F_1 и F_2. Это число обозначим через $2a$. Точки F_1, F_2 называются *фокусами* гиперболы, расстояние между ними называется *фокальным расстоянием* и обозначается через $2c$. Согласно определению $a < c$. Числа $r_i = \rho(M, F_i)$, $i = 1, 2$, называются *фокальными радиусами* точки M.

Из определения гиперболы следует, что точка M плоскости является точкой гиперболы тогда и только тогда, когда

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad a < c. \tag{53.1}$$

Каноническое уравнение. Запишем условие (53.1) в координатной форме. Поступая так же, как и в случае эллипса, построим каноническую систему координат Oxy для гиперболы (53.1).

Теорема 53.1. *Уравнение гиперболы в канонической системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{53.2}$$

Доказательство. Если $M(x, y)$ – точка гиперболы (53.1), то

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a, \quad a < c,$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a, \quad a < c.$$

Используя те же преобразования, что и для эллипса, придем к уравнению

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \quad a^2 - c^2 < 0,$$

или, в обозначениях $-b^2 = a^2 - c^2$, к уравнению (53.2).

Таким образом, любая точка $M(x, y)$ гиперболы удовлетворяет уравнению (53.2). Обратное утверждение доказывается так же, как и для эллипса. Здесь $|x| \geq a$, поэтому

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{cx}{a} + a, \\ r_2 = \dfrac{cx}{a} - a, \end{cases} \text{ если } x \geq a; \quad \begin{cases} r_1 = -\left(\dfrac{cx}{a} + a\right), \\ r_2 = -\left(\dfrac{cx}{a} - a\right), \end{cases} \text{ если } x \leq -a. \tag{53.3}$$

Таким образом, в обоих случаях $|r_1 - r_2| = 2a$. ■

Уравнение (53.2) называется *каноническим уравнением гиперболы*. Отметим простейшие свойства гиперболы, вытекающие из ее канонического уравнения.

1°. Как и в случае эллипса, координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – центром симметрии. Ось Ox пересекает гиперболу в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ и называется *вещественной осью гиперболы*. Ось Oy не пересекает гиперболу и называется *мнимой осью*. Начало координат называется *центром гиперболы*, числа $a > 0$, $b > 0$ – *вещественной* и *мнимой полуосями гиперболы*.

2°. Все точки гиперболы лежат вне полосы, определяемой прямыми $x = \pm a$, так как $|x| \geq a$ (рис. 1). Это означает, что гипербола состоит из двух отдельных частей, называемых *ветвями гиперболы*.

3°. Все точки гиперболы лежат в тех вертикальных углах, образованных прямыми $y = \pm\frac{b}{a}x$, которые содержат вещественную ось, так как для точек $M(x, y)$ гиперболы $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, т.е. $|y| \leq \frac{b}{a}|x|$.

4°. Исследуем форму гиперболы. В силу симметрии достаточно провести это исследование лишь в I четверти. Здесь уравнение гиперболы имеет вид $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Легко проверить, что (рис. 1):

а) $y(x)$ непрерывна и возрастает на $[a, +\infty)$, при этом $y(a) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$;

б) $y'(a) = \infty$, так что касательная к гиперболе в точке $x = a$ параллельна оси Oy;

в) $y''(x) < 0$, следовательно, линия выпукла вверх;

г) если l – прямая, заданная уравнением $y = \frac{b}{a}x$, то для всех точек $M(x, y)$ гиперболы $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(M, l) = 0$, так как

$$\rho(M, l) = \frac{|bx/a - y|}{\sqrt{1 + b^2/a^2}} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|bx - b\sqrt{x^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$
$$= \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \to 0 \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Итак, все точки гиперболы с ростом x сколь угодно близко приближаются к прямым

$$l_1 : \ y = -\frac{b}{a}x \qquad \text{и} \qquad l_2 : \ y = \frac{b}{a}x,$$

не пересекая их. Прямые l_1, l_2 называются *асимптотами гиперболы*.

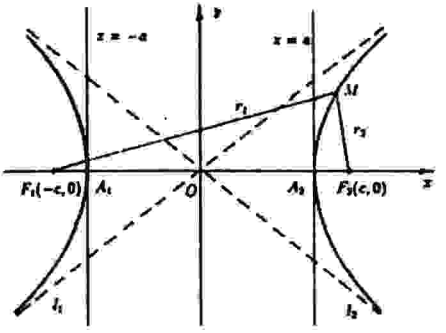


Рис. 1

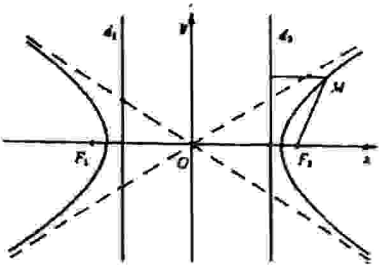


Рис. 2

Директориальное свойство. Число $\varepsilon = c/a$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Из определения следует, что $\varepsilon > 1$, при этом

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\ , \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

и, с учетом (53.3),

$$\begin{cases} r_1 = -(\varepsilon x + a), \\ r_2 = -(\varepsilon x - a) \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} r_1 = \varepsilon x + a, \\ r_2 = \varepsilon x - a \end{cases}$$

для левой и правой ветвей гиперболы соответственно.

Прямые d_1 и d_2, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$d_1 : \ x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad d_2 : \ x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами гиперболы* (рис. 2).

Директриса d_i называется *соответствующей* фокусу F_i, $i = 1, 2$.

Теорема 53.2. *Гипербола есть геометрическое место точек M плоскости, для которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через эту точку, равно данному числу $\varepsilon > 1$, т.е.*

$$\frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 1.$$

Доказательство. Так же как и в случае эллипса (теорема 52.2), для данных точки F, прямой d и числа $\varepsilon > 1$ строится гипербола, для которой точка F является фокусом, прямая d – соответствующей директрисой, число ε – эксцентриситетом. Если $m = \rho(F, d)$, то полуоси гиперболы определяются соотношениями

$$m = a\varepsilon - \frac{a}{\varepsilon}, \quad c = a\varepsilon \tag{53.4}$$

или $a = \dfrac{m\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$, $c = a\varepsilon$, $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$. Использование тех же преобразований, что и при доказательстве теоремы 52.2, завершает доказательство. ■

§ 54. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние от некоторой фиксированной точки F плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой d, не проходящей через точку F. Точка F называется *фокусом параболы*, прямая d – ее *директрисой*. Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через p. *Эксцентриситет параболы* по определению считается равным 1.

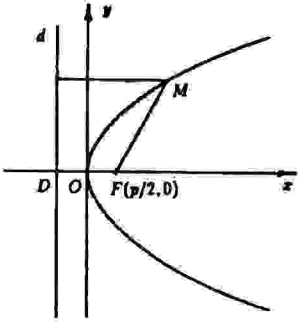


Рис. 1

Каноническое уравнение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy, принимая за ось Ox прямую, проходящую через точку F перпендикулярно прямой d, ориентированную от прямой d к точке F, за начало O – середину отрезка FD, где D – точка пересечения оси Ox с прямой d; ориентацию на оси Oy выбираем произвольно (рис. 1). Эта система координат называется *канонической системой координат* для данной параболы.

Теорема 54.1. *Уравнение параболы в канонической системе координат имеет вид*

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{54.1}$$

Доказательство. В канонической системе координат Oxy фокус F имеет координаты $(p/2, 0)$, директриса d определяется уравнением $x = -p/2$. Точка $M(x, y)$ является точкой параболы тогда и только тогда, когда $\rho(M, F) = \rho(M, d)$, или, что то же самое,

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left| x + \frac{p}{2} \right|.$$

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим равносильное уравнение $x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$ или уравнение (54.1). ■

Уравнение (54.1) называется *каноническим уравнением параболы*.

Следующие свойства параболы (рис. 1) непосредственно вытекают из канонического уравнения.

1°. Ось Ox канонической системы координат является осью симметрии параболы. Она называется *осью параболы*. Начало координат лежит на параболе и называется *вершиной параболы*.

2°. Все точки параболы расположены в правой полуплоскости от оси Oy, так как $x \geq 0$.

3°. Исследуем форму параболы. В силу симметрии достаточно рассмотреть I четверть. Здесь уравнение параболы имеет вид

$$y = \sqrt{2px}, \; x \geq 0.$$

Легко проверить, что:

а) $y(x)$ непрерывна и возрастает на $[0, +\infty)$, причем $y(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$;

б) $y'(0) = \infty$, так что касательная к параболе в точке $x = 0$ параллельна оси Oy;

в) $y''(0) < 0$, следовательно, парабола выпукла вверх (рис. 1).

Замечание. Определение параболы, по существу, означает ее директориальное свойство

$$\frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)} = \varepsilon, \tag{54.2}$$

где F – фокус, d – директриса, ε – эксцентриситет, которое, как мы видели в §52, 53, имеет место для эллипсов и гипербол. Отличие

состоит лишь в том, что для эллипсов $0 < \varepsilon < 1$, для парабол $\varepsilon = 1$, для гипербол $\varepsilon > 1$. Итак, если на плоскости даны прямая d и не принадлежащая ей точка F, то геометрическое место точек M плоскости, удовлетворяющих условию (54.2), является либо эллипсом (если $0 < \varepsilon < 1$), либо параболой (если $\varepsilon = 1$), либо гиперболой (если $\varepsilon > 1$).

Эти линии обладают целым рядом других свойств, имеющих "родственные" формулировки.

§ 55. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

Будем считать, что эллипс, гипербола и парабола заданы своими каноническими уравнениями (52.2), (53.2), (54.1). Найдем уравнения касательных к этим линиям.

Теорема 55.1. *В канонической системе координат уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе в точке (x_0, y_0) линии имеют вид*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{55.1}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{55.2}$$

$$yy_0 = p(x + x_0) \tag{55.3}$$

соответственно.

Доказательство. Все три уравнения выводятся по одной схеме. Приведем ее для эллипса. Воспользуемся известным из курса математического анализа [11] уравнением касательной в неособой точке (x_0, y_0) линии, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Это уравнение имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \tag{55.4}$$

где $F'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0)$ – частные производные функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Для эллипса (52.2) уравнение касательной в точке (x_0, y_0) этого эллипса имеет согласно (55.4) вид

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

или, с учетом того, что $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, вид (55.1). ■

§ 56. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

Здесь речь идет о биссекториальных свойствах касательных к этим линиям.

Теорема 56.1. *Касательная к эллипсу в произвольной его точке M_0 есть биссектриса внешнего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, где F_1, F_2 – фокусы эллипса.*

Доказательство. Рассмотрим касательную (55.1) к эллипсу (52.2) в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 1).

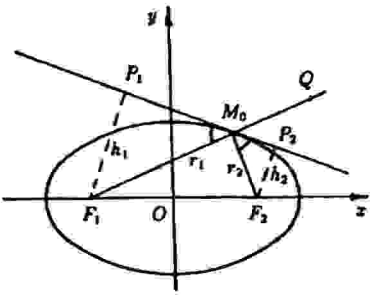


Рис. 1

Фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ расположены по одну сторону от касательной, так как в (55.1), с учетом условий $0 \leq \varepsilon < 1$ и $|x_0| \leq a$, имеем

$$\frac{-cx_0}{a^2} - 1 = -\frac{\varepsilon x_0}{a} - 1 = -\frac{\varepsilon x_0 + a}{a} < 0,$$
$$\frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{\varepsilon x_0}{a} - 1 = \frac{\varepsilon x_0 - a}{a} < 0.$$

Обозначим через P_1 и P_2 основания перпендикуляров, опущенных из фокусов эллипса на касательную. Утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что $\angle F_2M_0P_2 = \angle P_2M_0Q$ или, что то же самое, $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$ (рис. 1). Пусть h_1, h_2 – расстояния от фокусов до касательной. Тогда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{-(cx_0/a^2) - 1}{(cx_0/a^2) - 1} = \frac{a + \varepsilon x_0}{a - \varepsilon x_0} = \frac{r_1}{r_2},$$

следовательно, $\triangle F_2M_0P_2 \sim \triangle F_1M_0P_1$ (так как оба они прямоугольные), поэтому $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$. ■

Доказанной теореме можно дать следующую оптическую интерпретацию: если поместить в один из фокусов эллипса источник света, то лучи после отражения от эллипса соберутся в другом фокусе, так как световой луч отразится от эллипса как от касательной, проведенной к эллипсу в точке падения луча.

Теорема 56.2. *Касательная к гиперболе в произвольной ее точке M_0 является биссектрисой внутреннего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, где F_1, F_2 – фокусы гиперболы.*

Доказательство. Эта теорема доказывается точно так же, как и предыдущая. Отметим лишь одно отличие (не затрагивая очевидные): фокусы F_1 и F_2 расположены по разные стороны от любой касательной (рис. 2). ■

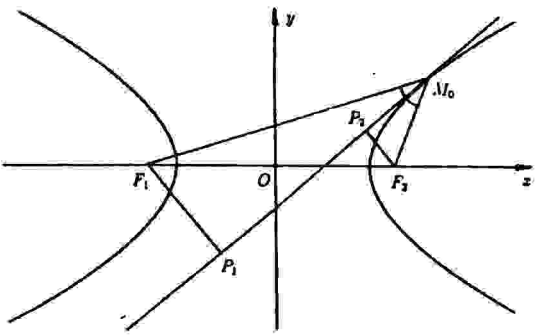


Рис. 2

Теореме 56.2 можно дать оптическое истолкование, аналогичное тому, которое было дано для эллипса.

Теорема 56.3. *Касательная к параболе есть биссектриса угла между фокальным радиусом M_0F точки касания M_0 и перпендикуляром M_0D, опущенным из точки M_0 на директрису.*

Доказательство. Из уравнения (55.3) касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ этой параболы следует, что точка A (рис. 3) пересечения касательной с осью Ox имеет кординаты $(-x_0, 0)$. Следовательно, $AO = x_0$ и $AF = AO + OF = x_0 + p/2$. С другой стороны, $M_0F = M_0D = M_0C + CD = x_0 + p/2$. Таким образом, $AF = M_0F$ и, значит, $\angle FAM_0 = \angle AM_0F$. Но $\angle FAM_0 = \angle DM_0A$, следовательно, $\angle DM_0A = \angle AM_0F$. ■

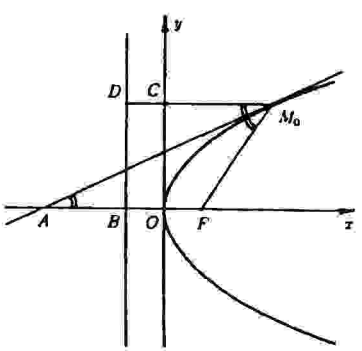


Рис. 3

Эта теорема имеет следующее оптическое истолкование: если в фокусе параболического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись от зеркала, образуют пучок параллельных лучей. Это свойство используется в конструкции зеркальных прожекторов.

§ 57. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Пусть $\mathcal{L}$ – какая-нибудь из трех линий: эллипс, гипербола или парабола, заданная своим каноническим уравнением.

Введем полярную систему координат, приняв за полюс фокус F линии (для эллипса F – левый фокус, для правой ветви гиперболы F – правый фокус, а для левой ветви – левый фокус), полярную ось направим в положительную сторону оси Ox канонической системы координат Oxy во всех случаях, кроме левой ветви гиперболы, а в этом случае – в отрицательную сторону оси Ox (рис. 1).

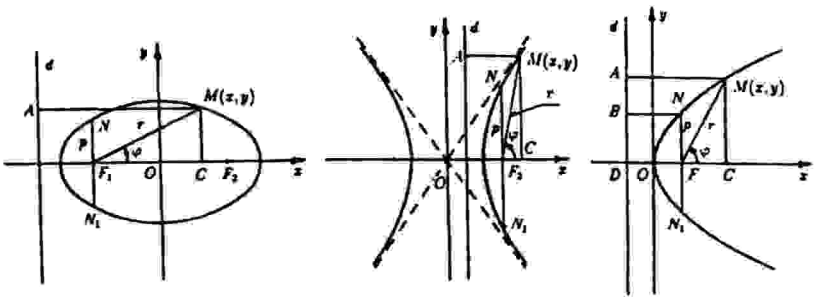


Рис. 1

Тогда для любой точки M плоскости ее полярный радиус r совпадает с фокальным радиусом $\rho(M,F)$. Согласно директориальному свойству линии $\mathcal{L}$ точка $M(x,y)$ принадлежит $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{r}{\rho(M,d)}=\varepsilon, \tag{57.1}$$

где ε – эксцентриситет линии $\mathcal{L}$. Пусть $\rho(F,d)=m$, тогда $\rho(M,d)=$ $=MA=r\cos\varphi+m$ и уравнение (57.1) линии может быть записано в виде

$$r=(r\cos\varphi+m)\varepsilon$$

или

$$r=\frac{m\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{57.2}$$

Для параболы $\varepsilon=1$, $m=p$, где p – фокальный параметр параболы. Следовательно, в выбранной полярной системе координат парабола определяется уравнением

$$r=\frac{p}{1-\cos\varphi}. \tag{57.3}$$

Для эллипса и гиперболы число $p=b^2/a$ называется *фокальным параметром*. Из (52.9) и (53.4) следует, что число $m\varepsilon$ в (57.2) совпа-

дает с фокальным параметром p, так как

$$m\varepsilon = a - a\varepsilon^2 = a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = p \quad \text{для эллипса и}$$

$$m\varepsilon = a\varepsilon^2 - a = a\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = p \quad \text{для гиперболы.}$$

Это позволяет записать уравнение (57.2) в виде

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{57.4}$$

где p – фокальный параметр линии, а ε – ее эксцентриситет. Поскольку для параболы $\varepsilon = 1$, уравнение (57.4) совпадает с уравнением (57.3) параболы. Таким образом, эллипс, гипербола и парабола описываются в полярной системе координат единым уравнением (57.4).

Замечание. Проведем из фокуса F (рис. 1) прямую, перпендикулярную оси Ox. Эта прямая пересечет линию $\mathcal{L}$ в двух точках N и N_1. Для точки N, как и для любой точки $\mathcal{L}$, справедливо соотношение (57.1), так что

$$\frac{\rho(N,F)}{\rho(N,d)} = \varepsilon.$$

Но $\rho(N,d) = \rho(F,d) = m$, следовательно, $\rho(N,F) = m\varepsilon = p$. Таким образом, фокальный параметр линии $\mathcal{L}$ совпадает с половиной длины хорды NN_1.

§ 58. Общее уравнение линии второго порядка

Пусть Oxy – аффинная система координат на плоскости. Алгебраическая линия второго порядка определяется уравнением

$$F(x,y) = 0,$$

где $F(x,y)$ – алгебраический многочлен второй степени от переменных x, y с вещественными коэффициентами (§31). Этот многочлен принято записывать в виде

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. В соответствии с этим алгебраическая линия второго порядка определяется уравнением

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0. \end{gathered} \tag{58.1}$$

Уравнение (58.1) называется *общим уравнением алгебраической линии второго порядка на плоскости.* Группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ (т.е. одночленов второй степени) называется *квадратичной частью* уравнения (58.1) (или *группой старших членов*),

группа слагаемых $2a_{13}x + 2a_{23}y$ – *линейной частью*, a_{33} – *свободным членом*.

Рассмотренные в предыдущих параграфах эллипс, гипербола и парабола, очевидно, представляют собой алгебраические линии второго порядка. Естественно поставить вопрос, какие еще линии являются линиями второго порядка. Чтобы ответить на него, нужно найти такую систему координат, в которой уравнение (58.1) принимает наиболее простой вид (как это было в случае эллипса, гиперболы и параболы). Поиском такой системы координат мы и займемся.

Компактная запись общего уравнения. Положим

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей квадратичной части*. В этих обозначениях уравнение (58.1) может быть записано в компактной форме:

$$X^T A X + 2b^T X + a_{33} = 0, \quad A = A^T, \ A \neq O. \tag{58.2}$$

В этом нетрудно убедиться, выполнив все умножения в левой части (58.2). Введем новую матрицу

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} & A & b \\ \hline & b^T & a_{33} \end{array}\right].$$

Числа $I_1 = \operatorname{tr} A$, $I_2 = |A|$, $K_3 = |B|$ называются *инвариантами линии второго порядка*, число $K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ – *полуинвариантом*. Далее нам потребуется несколько дополнительных понятий, относящихся к матрицам.

Характеристический многочлен. *Характеристическим многочленом* матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется функция $f(\lambda)$, определенная равенством

$$f(\lambda) = |A - \lambda I|. \tag{58.3}$$

Легко проверить, что:

а) если $n = 2$, то $f(\lambda) = (-\lambda)^2 + a_1(-\lambda) + a_0$, где

$$a_1 = \operatorname{tr} A, \quad a_0 = |A|; \tag{58.4}$$

б) если $n = 3$, то $f(\lambda) = (-\lambda)^3 + a_2(-\lambda)^2 + a_1(-\lambda) + a_0$, где

$$a_2 = \operatorname{tr} A, \quad a_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad a_0 = |A|. \tag{58.5}$$

Главным минором матрицы называется минор, расположенный в строках и столбцах с одинаковыми номерами. Нетрудно заметить (см.

(58.4), (58.5)), что коэффициенты характеристического многочлена связаны с главными минорами матрицы: если $n = 2$, то a_1 – сумма главных миноров первого порядка, a_0 – единственный главный минор второго порядка; если $n = 3$, то a_2, a_1, a_0 – суммы главных миноров первого, второго, третьего порядков соответственно.

Матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называются *подобными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что

$$A = Q^{-1}BQ. \tag{58.6}$$

Теорема 58.1. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Доказательство. Действительно, если $A = Q^{-1}BQ$, то $|A - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - Q^{-1}\lambda IQ| = |Q^{-1}(B - \lambda I)Q| = |B - \lambda I|$. Таким образом, при любом значении λ характеристические многочлены матриц A и B принимают одинаковые значения и, следовательно, совпадают. ■

Следствие. У подобных матриц второго порядка совпадают следы и определители. У подобных матриц третьего порядка совпадают следы, суммы главных миноров второго порядка и определители.

Преобразования общего уравнения. Пусть исходная аффинная система координат Oxy соответствует началу O и базису $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Переход к новой системе координат $O'x'y'$ означает (§24) перенос начала в точку $O'(\alpha, \beta)$ и преобразование базиса $eQ = e'$ с матрицей перехода Q. При этом старые координаты $X = (x, y)^T$ связаны с новыми $X' = (x', y')^T$ формулами преобразования координат:

1) $X = a + X'$, где $a = (\alpha, \beta)^T$, в случае переноса начала;

2) $X = QX'$ в случае преобразования базиса.

Исследуем особенности преобразования уравнения линии в каждом из этих случаев. Пусть линия $\mathcal{L}$ в системе координат Oxy задана своим общим уравнением (58.2).

Теорема 58.2. *При переходе к новому базису $e' = eQ$ общее уравнение* (58.2) *преобразуется в уравнение*

$$X'^T A' X' + 2b'^T X' + a_{33} = 0, \tag{58.7}$$

где $A' = Q^T AQ$, $b' = Q^T b$; при этом:

1) знаки инвариантов I_2, K_3 не изменяются;

2) в случае, когда e и e' – ортонормированные базисы, инварианты I_1, I_2, K_3 и полуинвариант K_2 не изменяются.

Доказательство. Подставим в уравнение (58.2) вместо старых координат X их выражения через новые координаты X': $X = QX'$. Тогда в новой системе координат $Ox'y'$ линия $\mathcal{L}$ определяется уравнением

$$X'^T Q^T AQX' + 2b^T QX' + a_{33} = 0$$

или

$$X'^T(Q^TAQ)X' + 2(Q^Tb)^TX' + a_{33} = 0.$$

Это означает, что в новом уравнении квадратичная часть определяется матрицей

$$A' = Q^TAQ, \tag{58.8}$$

а линейная часть – столбцом $b' = Q^Tb$. Таким образом, общее уравнение (58.2) линии $\mathcal{L}$ преобразуется в (58.7).

Докажем утверждение п.1. Из (58.8) следует, что $|A'| = |Q^TAQ| = |A| \cdot |Q|^2$, т.е. $I_2' = I_2|Q|^2$, где $|Q| \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{sgn} I_2' = \operatorname{sgn} I_2$. Далее, если

$$\widetilde{Q} = \begin{array}{|c|c|}\hline Q & O \\ \hline O & 1 \\ \hline \end{array}, \text{ то } \widetilde{Q}^T = \begin{array}{|c|c|}\hline Q^T & O \\ \hline O & 1 \\ \hline \end{array} \text{ и } |\widetilde{Q}| = |\widetilde{Q}^T| = |Q|.$$

Матрица B', соответствующая уравнению (58.7), имеет вид

$$B' = \begin{array}{|c|c|}\hline A' & b' \\ \hline b'^T & a_{33} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline Q^TAQ & Q^Tb \\ \hline b^TQ & a_{33} \\ \hline \end{array} = \widetilde{Q}^TB\widetilde{Q}.$$

Следовательно, $|B'| = |B| \cdot |\widetilde{Q}|^2 = |B| \cdot |Q|^2$ и $K_3' = K_3|Q|^2$. Таким образом, $\operatorname{sgn} K_3' = \operatorname{sgn} K_3$.

Докажем п.2. Если оба базиса e и e' ортонормированы, то матрица перехода Q будет ортогональной матрицей (§24) и $Q^T = Q^{-1}$. При этом матрица $\widetilde{Q}$ также будет ортогональной, ибо $\widetilde{Q}^T\widetilde{Q} = \widetilde{Q}\widetilde{Q}^T = I$, и, следовательно, $\widetilde{Q}^T = \widetilde{Q}^{-1}$. Таким образом, $A'=Q^{-1}AQ$ и $B' = \widetilde{Q}^{-1}B\widetilde{Q}$, т.е. пары матриц A' и A, B' и B подобны. Отсюда и из теоремы 58.1 (и ее следствия) вытекает, что числа $I_1 = \operatorname{tr} A$, $I_2 = |A|$, $K_3 = |B|$, $K_2 = a_1 - I_2$ (где a_1 – сумма главных миноров второго порядка матрицы B) при переходе к новому базису не изменяются. ■

Замечание. Отметим, что при переходе к новому базису свободный член не изменяется.

Теорема 58.3. *При переносе начала координат в точку $O'(\alpha, \beta)$ общее уравнение* (58.2) *преобразуется в уравнение*

$$X'^TAX' + 2b'^TX' + a_{33}' = 0, \tag{58.9}$$

где $b' = b + Aa$, $a_{33}' = a^TAa + 2b^Ta + a_{33}$, $a = (\alpha, \beta)^T$, при этом инварианты I_1, I_2, K_3 не изменяются.

Доказательство. Подставим в уравнение (58.2) $X = X' + a$. Тогда $(X'^T + a^T)A(X' + a) + 2b^T(X' + a) + a_{33} = 0$, или

$$X'^TAX' + X'^TAa + a^TAX' + a^TAa + 2b^TX' + 2b^Ta + a_{33} = 0. \tag{58.10}$$

Заметим, что произведение X'^TAa есть вещественное число и его можно заменить результатом транспонирования, так что $X'^TAa = (X'^TAa)^T = a^TA^TX' = (Aa)^TX'$. Так как $A = A^T$, то $a^TAX' =$

$= a^T A^T X' = (Aa)^T X'$. С учетом этих соотношений уравнение (58.10) может быть записано в виде

$$X'^T A X' + 2(Aa + b)^T X' + a^T A a + 2b^T a + a_{33} = 0.$$

Это означает, что в новом уравнении квадратичная часть остается прежней, линейная часть определяется столбцом $b' = Aa + b$, свободный член a'_{33} равен $a^T A a + 2b^T a + a_{33}$. Таким образом, уравнение (58.2) линии $\mathcal{L}$ преобразуется в (58.9).

Что касается инвариантов, то неизменность I_1 и I_2 очевидна, так как матрица квадратичной части A осталась прежней. Докажем, что K_3 не изменяется. Имеем

$$B = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right],$$

$$B' = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22} \\ \hline a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12} & a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22} & a'_{33} \end{array}\right],$$

где

$$a'_{33} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33} =$$
$$= a_{33} + \alpha a_{13} + \beta a_{23} + \alpha(a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12}) + \beta(a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22}).$$

Последнее соотношение означает, что матрица B' получена из матрицы B с помощью элементарных преобразований: если к третьей строке матрицы B прибавить линейную комбинацию первых строк с коэффициентами α, β, а затем к третьему столбцу прибавить такую же линейную комбинацию первых столбцов, то получится матрица B'. Следовательно, $K'_3 = |B'| = |B| = K_3$. ■

Теорема 58.4. *Общее уравнение линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, переходом к другой прямоугольной декартовой системе координат приводится к одному и только одному из следующих типов уравнений:*

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a_0 = 0, \quad \textit{где} \quad \lambda_1\lambda_2 \neq 0; \\ \text{II.} & \lambda_2 y^2 + 2b_0 x = 0, \quad \textit{где} \quad \lambda_2 b_0 \neq 0; \\ \text{III.} & \lambda_2 y^2 + c_0 = 0, \quad \textit{где} \quad \lambda_2 \neq 0. \end{array} \tag{58.11}$$

Доказательство. Пусть Oxy – прямоугольная декартова система координат и линия $\mathcal{L}$ задана в этой системе координат общим уравнением (58.1).

Шаг 1 (преобразование базиса). **Метод вращений.** Покажем, что если $a_{12} \neq 0$, то поворотом осей можно привести квадратичную часть уравнения (58.1) к сумме квадратов. Действительно, поворот осей на угол φ приводит к новому базису $e' = eQ$ с матрицей перехода (§24)

$Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Очевидно, $Q^TQ = QQ^T = I$, т.е. Q – ортогональная матрица. Согласно теореме 58.2 при переходе к системе координат $\{O; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ матрица квадратичной части A преобразуется в матрицу

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

при этом

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi + a_{12}\cos^2\varphi + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi = \\ = a_{12}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi.$$

Если $\operatorname{ctg} 2\varphi = (a_{11} - a_{22})/(2a_{12})$, то $a'_{12} = 0$. Следовательно, при повороте осей на такой угол φ квадратичная часть уравнения преобразуется в сумму квадратов и уравнение (58.1) в новой системе координат $Ox'y'$ будет иметь вид

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \qquad (58.12)$$

При этом в силу теоремы 58.2 инварианты I_1, I_2, K_3 и полуинвариант K_2 останутся прежними.

Метод, использованный здесь, называется *методом вращений*.

Шаг 2 (перенос начала). Дальнейшее упрощение уравнения (58.12) основано на том, что если в нем содержится ненулевой квадрат какой-либо переменной, то переносом начала можно освободиться от этой переменной в первой степени. Действительно, если $a'_{11} \neq 0$, то

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' = a'_{11}\left(x'^2 + \frac{2a'_{13}}{a'_{11}}x'\right) = \\ = a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} = \left\{x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right\} = a'_{11}x''^2 - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}}.$$

Таким образом, если $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, то переносом начала

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$$

уравнение (58.12) преобразуется в уравнение

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33} = 0, \quad a'_{11}a'_{22} \neq 0,$$

где $a'_{33} = a_{33} - \dfrac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \dfrac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}}$, т.е. в уравнение типа I.

Пусть один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} равен нулю. Если $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$, то переносом начала

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$$

уравнение (58.12) преобразуется в уравнение

$$a'_{22}y''^2 + 2a'_{13}x'' + a'_{33} = 0, \quad a'_{22} \neq 0, \tag{58.13}$$

где $a'_{33} = a_{33} - a'^2_{23}/a'_{22}$.

Случай, когда $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} = 0$, сводится к предыдущему переименованием переменных

$$x'' = y', \quad y'' = x', \tag{58.14}$$

что соответствует переходу к новому базису с матрицей перехода $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Нетрудно проверить, что Q – ортогональная матрица, поэтому числа I_1, I_2, K_3, K_2 при таком переходе не изменяются. Очевидно, что новая система координат получена поворотом осей с последующим отражением одной из осей относительно другой.

Итак, дальнейшее преобразование общего уравнения (58.1) сводится к преобразованию уравнения (58.13).

Если в этом уравнении $a'_{13} = 0$, то уравнение (58.13) относится к уравнению типа III.

Если же $a'_{13} \neq 0$, то $2a'_{13}x'' + a'_{33} = 2a'_{13}\,(x'' + a'_{33}/(2a'_{13}))$ и переносом начала

$$x''' = x'' + a'_{33}/(2a'_{13}), \quad y''' = y''$$

уравнение (58.13) приводится к уравнению

$$a'_{22}y'''^2 + 2a'_{13}x''' = 0, \quad a'_{22}a'_{13} \neq 0,$$

которое относится к типу II.

Отметим, что все промежуточные и окончательная системы координат оставались прямоугольными, так как преобразования базиса с помощью ортогональной матрицы перехода сохраняют свойство ортонормированности (§24). Итак, переходом к новой прямоугольной системе координат общее уравнение (58.1) приводится к одному из трех указанных типов уравнений.

Перейдем к вопросу о единственности. Для этого найдем инварианты I_2, K_3 для каждого из уравнений (58.11). Имеем для уравнения типа I:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}; \tag{58.15}$$

для уравнения типа II:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{58.16}$$

для уравнения типа III:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix}. \tag{58.17}$$

Следовательно,

1) $I_2 \neq 0$ для уравнения типа I;
2) $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$ для уравнения типа II;
3) $I_2 = 0$, $K_3 = 0$ для уравнения типа III.

Эти условия взаимно исключают друг друга, и так как общее уравнение и уравнения (58.11) имеют одинаковые инварианты I_2, K_3, то общее уравнение (58.1) приводится только к одному из трех указанных типов уравнений. ■

Уравнения (58.11) называются *приведенными уравнениями линии второго порядка.*

Замечание. Особо отметим, что в *прямоугольных* координатах коэффициенты λ_1 и λ_2 приведенных уравнений являются инвариантами линии, так как

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I_1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = I_2 \tag{58.18}$$

и, следовательно, λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического многочлена матрицы A:

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0. \tag{58.19}$$

§ 59. Классификация линий второго порядка на плоскости

Канонические уравнения.

Теорема 59.1. *Общее уравнение* (58.1) *линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, определяет одну и только одну из девяти линий, для каждой из которых существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой линии имеет следующий вид:*

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0)$ – *эллипс;*

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – *мнимый эллипс;*

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – *пара мнимых пересекающихся прямых;*

4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *гипербола;*

5) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – *пара пересекающихся прямых;*

6) $y^2=2px \quad (p>0)$ – *парабола;*
7) $y^2=a^2 \quad (a\neq 0)$ – *пара параллельных прямых;*
8) $y^2=-a^2 \quad (a\neq 0)$ – *пара мнимых параллельных прямых;*
9) $y^2=0$ – *пара совпадающих прямых.*

Доказательство. Пусть общее уравнение (58.1) переходом к новой прямоугольной декартовой системе координат преобразовалось в приведенное уравнение. Рассмотрим все возможные при этом варианты.

Если $I_2\neq 0$, то уравнение (58.1) преобразуется в приведенное уравнение типа I:

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+a_0=0, \tag{59.1}$$

где $\lambda_1\lambda_2\neq 0$. Для этого уравнения согласно (58.15)

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2, \quad I_2=\lambda_1\lambda_2, \quad K_3=\lambda_1\lambda_2 a_0. \tag{59.2}$$

В зависимости от знаков λ_1, λ_2, a_0 уравнение (59.1) может быть записано по-разному.

1. Если $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1 a_0<0$, т.е.

$$I_2>0, \quad I_1K_3<0, \tag{59.3}$$

то простейшие преобразования приводят уравнение (59.1) к равносильному уравнению $\dfrac{x^2}{-a_0/\lambda_1}+\dfrac{y^2}{-a_0/\lambda_2}=1$ или $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $a^2=-\dfrac{a_0}{\lambda_1}$, $b^2=-\dfrac{a_0}{\lambda_2}$. В этом уравнении можно считать, что $a\geq b>0$, так как в противном случае достаточно переименовать переменные, как это было сделано в (58.14). Мы получили уравнение 1, известное нам как каноническое уравнение *эллипса.*

2. Если $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1 a_0>0$, т.е.

$$I_2>0, \quad I_1K_3>0, \tag{59.4}$$

то, поступая аналогично, приходим к уравнению 2.

Ясно, что нет ни одной точки плоскости, удовлетворяющей этому уравнению. Принято говорить о нем как об уравнении *мнимого эллипса.*

3. Если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $a_0 = 0$, т.е.

$$I_2 > 0, \quad K_3 = 0, \tag{59.5}$$

то уравнение (59.1) эквивалентно уравнению 3, где $a^2 = |\lambda_1|^{-1}$, $b^2 = |\lambda_2|^{-1}$.

Ясно, что только начало координат удовлетворяет этому уравнению. Принято говорить о нем как об уравнении *пары мнимых пересекающихся прямых* (или *вырожденного эллипса*).

4. Если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $a_0 \neq 0$, т.е.

$$I_2 < 0, \quad K_3 \neq 0, \tag{59.6}$$

то уравнение (59.1) эквивалентно уравнению 4. Это известное каноническое уравнение *гиперболы*.

5. Если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $a_0 = 0$, т.е.

$$I_2 < 0, \quad K_3 = 0, \tag{59.7}$$

то уравнение (59.1) эквивалентно уравнению 5. Оно определяет *пару пересекающихся прямых* $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Рассмотренные линии образуют первую группу линий второго порядка на плоскости. Ими исчерпываются все линии, которые определяются приведенными уравнениями типа I, т.е. случаем, когда $I_2 \neq 0$.

6. Если $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$, то уравнение (59.1) преобразуется в приведенное уравнение типа II:

$$\lambda_2 y^2 + 2b_0 x = 0, \tag{59.8}$$

где $\lambda_2 b_0 \neq 0$. Для этого уравнения согласно (58.16)

$$I_1 = \lambda_2, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = -\lambda_2 b_0^2 \neq 0. \tag{59.9}$$

Уравнение (59.8) эквивалентно уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где $p = -b_0/\lambda_2$. В этом уравнении можно считать, что $p > 0$, так как в противном случае достаточно выполнить отражение оси Ox относительно оси Oy: $x' = -x$, $y' = y$, что соответствует переходу к новому базису с матрицей перехода $Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, которая в силу ортогональности приводит к ортонормированному базису и не меняет инвариантов. Итак, мы получили уравнение 6, известное как каноническое уравнение *параболы*.

Если $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, то уравнение (59.1) преобразуется в приведенное уравнение типа III:

$$\lambda_2 y^2 + c_0 = 0, \tag{59.10}$$

где $\lambda_2 \neq 0$. Для этого уравнения согласно (58.17)

$$I_1 = \lambda_2, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 = \lambda_2 c_0. \tag{59.11}$$

Линии этой группы определяются полуинвариантом K_2. Как следует из теоремы 58.2, преобразования базиса с помощью ортогональной матрицы перехода не изменяют K_2.

Лемма. *Если $I_2 = K_3 = 0$, то полуинвариант K_2 не изменяется при параллельном переносе.*

Доказательство леммы. Не изменяя числа K_2, преобразуем общее уравнение (58.1) в уравнение (58.12), в котором $a'_{12} = 0$. Для этого уравнения

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix}.$$

Так как $I_2 = 0$, то $a'_{11}a'_{22} = 0$. Поэтому одно из чисел a'_{11} или a'_{22} равно нулю. Не изменяя инвариантов, можно считать (см. обсуждение (58.14)), что $a'_{11} = 0$. Тогда

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Но $K_3 = 0$, поэтому $a'_{13} = 0$ и уравнение (58.12) имеет вид

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \tag{59.12}$$

при этом

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad K_2 = K'_2 = a'_{22}a_{33} - a'^2_{23}. \tag{59.13}$$

При параллельном переносе $x' = x'' + \alpha$, $y' = y'' + \beta$ уравнение (59.12) преобразуется в уравнение

$$a'_{22}y''^2 + 2(\beta a'_{22} + a'_{23})y'' + 2\beta a'_{23} + a_{33} = 0,$$

для которого

$$B'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & \beta a'_{22} + a'_{23} \\ 0 & \beta a'_{22} + a'_{23} & a_{33}' + a'_{22}\beta^2 + 2a'_{23}\beta \end{bmatrix},$$

$$K''_2 = a'_{22}(a_{33} + a'_{22}\beta^2 + 2a'_{23}\beta) - (\beta a'_{22} + a'_{23})^2 = a'_{22}a_{33} - a'^2_{23}.$$

Из (59.13) следует, что $K''_2 = K_2$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы и вернемся к уравнению (59.10). Отметим, что согласно лемме полуинварианты K_2 в уравнениях (58.1) и (59.10) совпадают.

7. Если $\lambda_2 c_0 < 0$, т.е.

$$K_2 < 0, \tag{59.14}$$

то уравнение (59.10) эквивалентно уравнению 7 (где $a^2 = -c_0/\lambda_2 > 0$), которое определяет *пару параллельных прямых*: $y = a$ и $y = -a$.

8. Если $\lambda_2 c_0 > 0$, т.е.

$$K_2 > 0, \tag{59.15}$$

то уравнение (59.10) эквивалентно уравнению 8 (где $a^2 = c_0/\lambda_2 > 0$). Ясно, что ни одна точка плоскости не удовлетворяет этому уравнению. Принято говорить о нем как об уравнении *пары мнимых параллельных прямых*.

9. Если $c_0 = 0$, т.е.

$$K_2 = 0, \tag{59.16}$$

то уравнение (59.10) эквивалентно уравнению 9, которое определяет *пару совпадающих прямых*: $y = 0$ и $y = 0$.

Условия (59.3)–(59.7), (59.9), (59.11), (59.14)–(59.16) исчерпывают все варианты линий второго порядка на плоскости и взаимно исключают друг друга. Следовательно, общее уравнение (58.1) определяет одну и только одну из девяти перечисленных линий. ■

Для каждой из этих линий найдена прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение линии имеет вид 1–9. Эти уравнения называют *каноническими уравнениями линий второго порядка*.

Линии, для которых $I_2 > 0$, называются *линиями эллиптического типа*; $I_2 < 0$ – *гиперболического типа*; $I_2 = 0$ – *параболического типа*.

Замечание. Если общее уравнение (58.1) линии второго порядка задано в прямоугольной декартовой системе координат, то каноническое уравнение линии может быть найдено по инвариантам, так как согласно (58.18) и (58.19) коэффициенты λ_1, λ_2 приведенных уравнений являются корнями характеристического многочлена матрицы A:

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0.$$

При этом если $\lambda_1 \le \lambda_2$, то в силу (59.2), (59.9), (59.11)

$$a_0 = \frac{K_3}{I_2}, \quad b_0^2 = -\frac{K_3}{I_1}, \quad c_0 = \frac{K_2}{I_1}.$$

Результаты проведенных исследований сведены в следующую таблицу.

Приведенное уравнение	Номер	Каноническое уравнение линии	Название линии	Признак линии
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0,$ $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$	1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $a \geq b > 0$	Эллипс	$I_2 > 0,$ $I_1 K_3 < 0$
	2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимый эллипс	$I_2 > 0,$ $I_1 K_3 > 0$
	3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара мнимых пересекающихся прямых	$I_2 > 0,$ $K_3 = 0$
	4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гипербола	$I_2 < 0,$ $K_3 \neq 0$
	5	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара пересекающихся прямых	$I_2 < 0,$ $K_3 = 0$
$I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\, x = 0,$ $I_1 K_3 \neq 0$	6	$y^2 = 2px,$ $p > 0$	Парабола	$I_2 = 0,$ $K_3 \neq 0$
$I_1 y^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0,$ $I_1 \neq 0$	7	$y^2 = a^2,$ $a \neq 0$	Пара параллельных прямых	$I_2 = 0,$ $K_3 = 0,$ $K_2 < 0$
	8	$y^2 = -a^2,$ $a \neq 0$	Пара мнимых параллельных прямых	$I_2 = 0,$ $K_3 = 0,$ $K_2 > 0$
	9	$y^2 = 0$	Пара совпадающих прямых	$I_2 = 0,$ $K_3 = 0,$ $K_2 = 0$

Метод Лагранжа. Теорема 58.4 о приведенных уравнениях остается справедливой и в аффинной системе координат, так как тип приведенного уравнения определяется только *знаками* инвариантов I_2, K_3, которые в силу теоремы 58.2 сохраняются при преобразованиях аффинной системы координат. Вместо вычисления инвариантов или метода вращений можно использовать *метод выделения полных квадратов* (*метод Лагранжа*), который состоит в следующем.

1. Пусть в общем уравнении (58.1) $a_{11} \neq 0$. Выделим полный квадрат в группе членов, содержащих переменную x:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x = a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + a_{13}\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y + a_{13}\right)^2.$$

Положим

$$x' = x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + a_{13}. \qquad (59.17)$$

Тогда уравнение (58.1) примет вид

$$a_{11}x'^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0. \tag{59.18}$$

Если $a'_{22} \neq 0$, то положив

$$y' = y + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, \tag{59.19}$$

приводим уравнение (59.18) к уравнению

$$a_{11}x'^2 + a'_{22}y^2 + a''_{33} = 0, \quad a_{11}a'_{22} \neq 0, \tag{59.20}$$

которое является приведенным уравнением типа I. Преобразования координат (59.17), (59.19) определяют переход к новому базису с помощью матрицы перехода

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и переноса начала. Согласно теоремам 58.2 и 58.3 знаки инвариантов I_2, K_3 в уравнениях (58.1) и (59.20) совпадают.

Если в уравнении (59.18) $a'_{22} = 0$, то:

а) в случае когда $a'_{23} = 0$, уравнение (59.18) является приведенным уравнением типа III;

б) в случае когда $a'_{23} \neq 0$, положив

$$y' = y + \frac{a'_{33}}{2a'_{23}},$$

приводим уравнение (59.18) к уравнению

$$a_{11}x'^2 + 2a'_{13}y' = 0, \quad a_{11}a'_{13} \neq 0,$$

которое является приведенным уравнением типа II.

2. Пусть в общем уравнении (58.1) $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$. Поступая так же, как и в п.1 (с точностью до названия переменных), освобождаемся от слагаемого $2a_{12}xy$ и линейной части (если это возможно) и приходим к приведенным уравнениям, не изменив знаков инвариантов I_2, K_3.

3. Пусть в общем уравнении (58.1) $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$. Тогда $a_{12} \neq 0$. Положив

$$x = x' + y', \quad y = x' - y', \tag{59.21}$$

сводим этот случай к уже рассмотренным. Отметим, что преобразования координат (59.21) отвечают переходу к новому базису с матрицей перехода $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Так как приведенные уравнения (58.11) определяются лишь знаком инвариантов I_2, K_3, то в результате выполненных преобразований общее уравнение (58.1) приведется к одному и только одному из уравнений (58.11). С помощью метода Лагранжа легко устанавливается тип линии, однако не может быть получено каноническое уравнение.

Глава XII. Линейное пространство над произвольным полем

В гл. IV мы рассматривали вещественные линейные пространства. Вещественными они назывались потому, что операция умножения на число предусматривала умножение вектора на вещественные числа. В §43 мы уже отмечали, что все свойства линейного пространства остаются в силе, если поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ заменить произвольным полем P. В этой главе воспроизводится известное определение линейного пространства для случая произвольного поля, напоминаются уже известные факты и рассматриваются новые.

§ 60. Определение и терминология

Пусть дано поле P. Непустое множество V называется *линейным* или *векторным пространством над полем* P, если на этом множестве определены внутренний закон композиции $V \times V \to V$, называемый сложением, и внешний закон композиции $P \times V \to V$, называемый умножением на число из поля P, удовлетворяющие следующим аксиомам: для любых $a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) существует элемент $\theta \in V$ такой, что $a + \theta = \theta + a = a$;
4) для любого элемента $a \in V$ существует элемент $-a \in V$ такой, что $a + (-a) = (-a) + a = \theta$;
5) $1 \cdot a = a$;
6) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется *вещественным линейным пространством*, а над полем $\mathbb{C}$ – *комплексным*.

Два вектора x и y линейного пространства называются *коллинеарными*, если они отличаются лишь числовым множителем, т.е. либо $x = \alpha y$, $\alpha \in P$; либо $y = \beta x$, $\beta \in P$.

Примеры. 1. Арифметическое пространство P^n – линейное пространство над полем P. Как и в случае $\mathbb{R}^n$, здесь $P^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in P,\ k = \overline{1,n}\}$ с операциями: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\alpha \in P$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\ \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

2. В частности, арифметическое пространство $\mathbb{C}^n$ есть комплексное линейное пространство. В таком пространстве арифметические векторы умножаются на комплексные числа. Однако можно было бы ограничиться умножением только на вещественные числа, при этом

результат умножения, несомненно, останется арифметическим вектором из $\mathbb{C}^n$. Это означает, что внешний закон композиции можно ввести и как умножение на вещественные числа, т.е. как отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Символом $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ будем обозначать множество $\mathbb{C}^n$, в котором внешний закон композиции определен как $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Нетрудно проверить, что $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ – вещественное линейное пространство. В частности, само поле $\mathbb{C}$ можно рассматривать как вещественное линейное пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

3. Аксиомы линейного пространства выявляют алгебраические свойства многих классов функций, часто встречающихся в математическом анализе: например, $C[0,1]$ – множество непрерывных функций на отрезке $[0,1]$; $D[0,1]$ – множество всех дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$; $C^1[0,1]$ – множество всех функций, непрерывных вместе с первой производной на отрезке $[0,1]$. Хотя у каждого из перечисленных множеств имеются и другие замечательные свойства, все они охватываются единой алгебраической схемой, аксиоматизируемой определением линейного пространства. Нетрудно проверить, что эти множества являются вещественными линейными пространствами относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число. Линейные пространства функций принято называть *функциональными пространствами.*

Точки в линейном пространстве. В геометрических пространствах мы имели дело и с векторами, и с точками: каждая упорядоченная пара точек A и B однозначно определяла вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, каждый вектор $\mathbf{a}$ мы могли отложить от любой точки C, и это однозначно определяло точку D – конец вектора $\mathbf{a}$, отложенного от точки C. Если зафиксировать точку O как начало любого вектора пространства, то каждому вектору можно поставить в соответствие точку, которая является его концом. Это приводит к взаимно однозначному соответствию между векторами пространства и точками, т.е. к возможности "отождествить" векторы и точки пространства.

Обобщение этого факта для произвольного линейного пространства приводит к понятию аффинного пространства.

Аффинным (или точечно-аффинным) пространством над линейным пространством V называется множество S элементов, называемых точками, для которого заданы

а) линейное пространство V над полем P и

б) отображение $v\colon S \times S \to V$, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре точек $A, B \in S$ вектор $v(A,B) \in V$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) для любой точки $A \in S$ и любого вектора $\mathbf{a} \in V$ существует единственная точка $B \in S$, для которой

$$v(A,B) = \mathbf{a};$$

2) для любых трех точек $A, B, C \in S$ имеет место равенство

$$v(A,B) + v(B,C) = v(A,C).$$

Обозначение: вектор $v(A,B)$ обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Из аксиом аффинного пространства следует, что

а) $\overrightarrow{AB} = \theta$ тогда и только тогда, когда $A = B$;

б) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Размерностью аффинного пространства S называется размерность линейного пространства V.

Примеры. 1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3 являются аффинными пространствами над самими собой.

2. Любое линейное пространство V можно рассматривать как аффинное пространство над самим собой. Для этого достаточно векторы назвать точками и определить отображение $v\colon V \times V \to V$ следующим образом:

$$v(a,b) = a - b. \tag{60.1}$$

3. Любое аффинное пространство S можно рассматривать как линейное. Для этого зафиксируем какую-нибудь точку O пространства S и назовем ее началом. Тогда каждой точке $A \in S$ можно поставить в соответствие вектор $\overrightarrow{OA}$, называемый радиус-вектором точки A относительно начала O. Множество радиус-векторов всех точек пространства S и составляет линейное пространство V.

Более того, имеет место

Теорема 60.1. *Отображение* $\varphi\colon S \to V$, *определяемое правилом*

$$\varphi(A) = \overrightarrow{OA},$$

является биекцией, сохраняющей операцию v *аффинного пространства, т.е.*

$$v(A,B) = v(\varphi(A), \varphi(B)). \tag{60.2}$$

Доказательство. Биективность отображения φ непосредственно вытекает из аксиомы 1. Что касается равенства (60.2), то согласно определению (60.1) оно эквивалентно вытекающему из аксиомы 2 равенству

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}. \qquad \blacksquare$$

Теорема 60.1 позволяет "отождествить" аффинные и линейные пространства. Единственное отличие аффинных пространств от линейных состоит в том, что в линейном пространстве имеется единственное начало θ – нулевой вектор, в то время как в аффинном пространстве в качестве начала можно взять произвольную точку.

Замечание. В дальнейшем, говоря о линейном пространстве, будем иметь в виду, что его можно рассматривать как аффинное пространство с фиксированным началом. Тогда в нашем распоряжении будут и векторы, и точки, как концы векторов.

§ 61. Линейная зависимость. Ранг и база системы векторов

Понятие линейной зависимости и связанные с ней утверждения рассматривались в главе IV (§ 14–16) и относились к вещественным линейным пространствам. Все определения, а также теоремы и их доказательства остаются в силе и в произвольном линейном пространстве. Введем новые понятия. В дальнейшем, употребляя термин "линейное пространство", будем иметь в виду линейное пространство над произвольным полем P, не оговаривая это дополнительно.

Будем рассматривать конечные системы $a_1, \ldots, a_k$ векторов линейного пространства.

Линейно независимая подсистема системы векторов, через которую линейно выражается любой вектор системы, называется *базой* этой *системы векторов*.

Примеры. 1. В системе из нулевых векторов нет ни одной базы, так как любая ее подсистема линейно зависима.

2. Базисные строки матрицы согласно теореме о базисном миноре образуют базу системы строк, рассматриваемых как векторы арифметического пространства. Это же относится и к базисным столбцам.

3. В системе трех неколлинеарных векторов плоскости V_2 любая пара векторов образует базу.

Обратим внимание на то, что в этих примерах система векторов может обладать не единственной базой, но при этом все базы одной системы состоят из одинакового числа векторов.

Теорема 61.1. *Подсистема системы векторов является базой системы векторов тогда и только тогда, когда образует максимальную линейно независимую подсистему.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в системе векторов $a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_k$ подсистема $a_1, \ldots, a_r$ образует базу (здесь для упрощения записи в качестве подсистемы взяты первые r векторов, что, как будет видно из доказательства, не нарушает общности рассуждений). Тогда любая бóльшая подсистема будет линейно зависимой в силу теоремы 16.2, так как любой ее вектор линейно выражается через базу $a_1, \ldots, a_r$. Таким образом, база образует максимальную линейно независимую подсистему системы векторов.

Достаточность. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ – максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_k$. Тогда для любого вектора a_i, $i = \overline{1,k}$, подсистема $a_1, \ldots, a_r, a_i$ линейно зависима (если $i \leq r$, то как подсистема, содержащая два одинаковых вектора; если же $i > r$, то как подсистема из $r+1 > r$ векторов). В силу теоремы 14.6 вектор a_i линейно выражается через $a_1, \ldots, a_r$. Таким образом, $a_1, \ldots, a_r$ – база. ■

Следствие 1. *Все базы одной системы векторов состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов системы.*

Число векторов базы называется *рангом системы векторов*. Очевидно, ранг системы векторов равен максимальному числу линейно независимых векторов системы. Обозначение: $\operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_n)$.

Две системы векторов линейного пространства называются *эквивалентными*, если любой вектор каждой из этих систем линейно выражается через другую систему. Из определения следует, что *база системы векторов эквивалентна самой системе.*

Теорема 61.2. *Если система векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_m$, то $\operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k) \leq \operatorname{rg}(b_1, \ldots, b_m)$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ и $b_1, \ldots, b_s$ – базы рассматриваемых систем. Из условия теоремы и транзитивности свойства "линейной выражаемости" следует, что база $a_1, \ldots, a_r$ первой системы линейно выражается через базу $b_1, \ldots, b_s$ второй. Тогда $r \leq s$, так как в противном случае, если $r > s$, система $a_1, \ldots, a_r$ была бы линейно зависимой в силу теоремы 16.2. ■

Следствие 2. *Ранги эквивалентных систем совпадают.*

Следствие 3. *Эквивалентные линейно независимые системы векторов состоят из одинакового числа векторов.*

§ 62. Базис и размерность

Говорят, что *система векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства V порождает пространство V*, если любой вектор $x \in V$ является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_n$.

Упорядоченная система векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства V называется *базисом пространства V*, если она линейно независима и порождает V. Очевидно, что это определение совпадает с определением базиса, данным в §17 для вещественного линейного пространства.

Теорема 62.1. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одинакового числа векторов.*

Это утверждение вытекает из эквивалентности двух базисов линейного пространства и следствия 2 (§61). ■

Итак, число векторов базиса не зависит от самого базиса и однозначно определяется самим пространством. Ответ на вопрос, что представляет собой это число, дает теорема 17.1, справедливая и в пространстве над произвольным полем.

Напомним, что число векторов базиса линейного пространства V называется *размерностью пространства V* и обозначается символом $\dim V$. Размерность нулевого пространства по определению считается равной нулю. Из теоремы 17.1 следует, что размерность линейного пространства совпадает с максимальным числом линейно независи-

мых векторов этого пространства. Линейное пространство размерности n, где $n \in \mathbb{N}$, называется *n-мерным*. Нулевое пространство и n-мерные пространства называются *конечномерными*.

Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого числа $k \in \mathbb{N}$ в пространстве существует k линейно независимых векторов. Пример бесконечномерного пространства дан в §17 (пример 5). В курсе линейной алгебры изучаются лишь конечномерные линейные пространства.

Теорема 62.2 (о неполном базисе). *В n-мерном пространстве любую линейно независимую систему из k, где $k < n$, векторов можно дополнить до базиса.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – линейно независимая система векторов пространства V. Так как $k < n$, то в силу теоремы 17.1 система векторов $e_1, \ldots, e_k$ не является базисом V и, следовательно, не порождает всего пространства V. Пусть вектор $e_{k+1} \in V$ не является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_k$, тогда система векторов $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ линейно независима (в силу теоремы 14.6). Если $k+1 = n$, то эта система векторов образует базис пространства V; если же $k+1 < n$, то аналогичным образом построим линейно независимую систему из $k+2$ векторов. За $n-k$ таких шагов мы построим искомый базис $e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_n$. ■

Точно так же, как и в §17, определяются координаты вектора в базисе и матрица перехода от одного базиса к другому. При этом все факты, связанные с этими понятиями, остаются в силе и в общем случае, так как их доказательства опираются на те свойства вещественных чисел, которые имеют место в любом поле. Напомним эти факты.

1°. *Разложение вектора по базису единственно.*

2°. *Координаты вектора обладают свойством линейности.*

3°. *При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ координаты вектора x изменяются по следующему закону: $x_e = Qx_f$.*

Примеры. 1. В арифметических пространствах P^n, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ единичные векторы (14.6) образуют базис (§17, пример 2). Этот базис принято называть *естественным*. Координаты любого вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ в естественном базисе совпадают с компонентами $a_1, \ldots, a_n$ этого вектора.

2. В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ векторы (14.6), очевидно, не могут быть базисом, так как умножением этих векторов только на вещественные числа нельзя получить любой комплексный арифметический вектор $a = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$, где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$. Добавим к векторам (14.6) еще n векторов:

$$f_1 = (i, 0, \ldots, 0),\ f_2 = (0, i, \ldots, 0),\ \ldots,\ f_n = (0, 0, \ldots, i).$$

Покажем, что система векторов $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ образует базис пространства $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. Действительно, линейная комбинация этих векторов с вещественными коэффициентами α_k, β_k имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_k e_k + \sum_{i=1}^{n} \beta_k f_k = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n) \qquad (62.1)$$

и равна нулевому вектору $\theta = (0, \ldots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_k + i\beta_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, т.е. $\alpha_k = \beta_k = 0$, $k = \overline{1,n}$. Следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы. Они порождают все пространство $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$, так как любой вектор $(\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$ из $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ согласно (62.1) является линейной комбинацией этих векторов с вещественными коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$.

Итак, $\dim \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}} = 2n$.

§ 63. Изоморфизм линейных пространств

Два линейных пространства V_1 и V_2 над общим полем P называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для любых векторов $x, y \in V_1$ и любого числа $\alpha \in P$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Обозначение: $V_1 \cong V_2$. Само отображение φ называется *изоморфизмом линейных пространств*.

Примеры. 1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3 векторов на прямой, на плоскости и в пространстве изоморфны арифметическим пространствам $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно. Действительно, поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{x} \in V_n$ набор его координат в каком-либо базисе e, т.е. арифметический вектор $x_e \in \mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, 3$. Это соответствие взаимно однозначно и сохраняет законы композиции, так как координаты вектора обладают свойством линейности (§17).

2. $V_2 \cong C_{\mathbb{R}}$.

3. $P^{m\times n} \cong P^{mn}$ и, в частности, $\mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$.

Отметим простейшие свойства изоморфных пространств.

1°. *Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности на множестве всех линейных пространств над полем P.*

2°. *В изоморфных пространствах*

а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;

б) образ (и прообраз) нулевого вектора есть нулевой вектор;

в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;

г) образ (и прообраз) базиса есть базис.

Доказательства этих свойств опираются лишь на определение и элементарные свойства рассматриваемых объектов. Мы предоставляем их читателю.

Несмотря на простоту формулировок, уже эти свойства говорят о том, что изоморфные линейные пространства, даже самой различной природы, с точки зрения свойств линейного пространства неразличимы. Это позволяет многие свойства линейных пространств изучать на линейных пространствах простой структуры. К этой возможности мы будем неоднократно прибегать, проводя все вычисления в арифметических пространствах, а "рисуя" – в геометрических.

Теорема 63.1 (критерий изоморфизма). *Два линейных пространства над общим полем изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Доказательство. Необходимость вытекает из свойства "г" изоморфных пространств.

Достаточность. Пусть V_1 и V_2 – линейные пространства над полем P и пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Выберем в этих пространствах по базису: пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V_1, а $f_1, \dots, f_n$ – базис V_2. Построим отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, поставив в соответствие каждому вектору $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V_1$ вектор $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in V_2$ (т.е. вектор, который имеет те же координаты, что и вектор x). В силу единственности разложения вектора по базису отображение φ биективно. При этом φ – изоморфизм, так как координаты вектора обладают свойством линейности. ■

Следствие. Любое n-мерное вещественное пространство изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$, а любое n-мерное комплексное пространство – арифметическому пространству $\mathbb{C}^n$.

Изоморфизм $\varphi\colon V \to W$, построенный при доказательстве теоремы 63.1, определяется двумя базисами $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ этих пространств и переводит вектор $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ в вектор $y = \sum_{k=1}^n x_k f_k$, имеющий в базисе $f_1, \dots, f_n$ те же координаты, что и вектор x в базисе $e_1, \dots, e_n$. В частности, если $e_1, \dots, e_n$ – базис пространства V над полем P и $f_1, \dots, f_n$ – естественный базис арифметического пространства P^n, то отображение $\varphi\colon V \to P^n$, которое каждому вектору $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ ставит в соответствие арифметический вектор $(x_1, \dots, x_n)$ пространства P^n, является изоморфизмом. Этот изоморфизм называется *координатным изоморфизмом, определенным базисом* $e_1, \dots, e_n$.

Координатный изоморфизм "заменяет" линейное пространство (сколь угодно экзотической природы) конкретным арифметическим пространством и сводит решение многих задач теории линейных пространств к вычислениям в поле.

§ 64. Линейные подпространства. Линейная оболочка

Напомним определение линейного подпространства, данное в §18 (оно остается неизменным и в случае линейного пространства над произвольным полем). Подмножество L линейного пространства V над полем P называется *линейным подпространством пространства* V, если оно само является линейным пространством относительно законов композиции в V. Другое определение линейного подпространства, эквивалентное этому, устанавливается известной теоремой 18.1, которая имеет место и в общем случае.

Как было установлено в §30, множество всех решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0 \tag{64.1}$$

с n неизвестными образует линейное подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ (или P^n в общем случае, когда $A \in P^{m\times n}$). Про это подпространство L говорят, что оно задано однородной системой (64.1), и записывают в виде

$$L: \quad Ax = 0. \tag{64.2}$$

Другой способ задания линейного подпространства дает понятие линейной оболочки.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – система векторов линейного пространства V над полем P. *Линейной оболочкой системы векторов* $a_1, \ldots, a_k$ называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Говорят также, что линейная оболочка *натянута на векторы* $a_1, \ldots, a_k$. Обозначение: $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$. Итак,

$$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \left\{ a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \,|\, \alpha_i \in P,\ i = \overline{1,k} \right\}.$$

Из определения следует, что каждое конечномерное пространство является линейной оболочкой векторов своего базиса. В частности, линейное подпространство, заданное однородной системой (64.2), является линейной оболочкой фундаментальной системы решений (§30).

Теорема 64.1. *Если $a_1, \ldots, a_k$ – векторы линейного пространства V, то $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ является линейным подпространством пространства V.*

Это утверждение вытекает из теоремы 18.1, так как для линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ обе импликации имеют место. ■

Итак, линейная оболочка $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ – это линейное подпространство, которое порождается векторами $a_1, \ldots, a_k$.

Теорема 64.2. *Две системы векторов линейного пространства эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные оболочки совпадают.*

Доказательство. Необходимость. Пусть системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ эквивалентны. Тогда $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_m)$, так как для этих множеств, как легко проверить, имеет место двустороннее вложение.

Достаточность очевидна. ■

Следствие 1. *Линейная оболочка системы векторов совпадает с линейной оболочкой своей базы.*

Следствие 2. *Размерность линейной оболочки системы векторов равна рангу этой системы:*

$$\dim \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k). \tag{64.3}$$

Теорема 64.3 (о монотонности размерности). *Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пространства. Подпространство той же размерности, что и все пространство, совпадает с пространством.*

Доказательство. Пусть L – линейное подпространство пространства V, $\dim L = k$, $\dim V = n$. Тогда $k \le n$, так как в противном случае в n-мерном пространстве V существует k, где $k > n$, линейно независимых векторов (например, векторы базиса L). Пусть $k = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ – базис L. Так как $\dim V = n$, то векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис V (§17, утверждение 1). Таким образом, $L = V = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$. ■

§ 65. Сумма и пересечение линейных подпространств

Пусть $L_1, \ldots, L_k$ – линейные подпространства линейного пространства V. *Суммой подпространств* $L_1, \ldots, L_k$ называется множество всевозможных векторов x, представимых в виде

$$x = x_1 + \ldots + x_k, \tag{65.1}$$

где $x_i \in L_i$, $i = \overline{1,k}$. Обозначение: $L_1 + \ldots + L_k$ или $\sum_{i=1}^{k} L_i$.

Итак,

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \{x = x_1 + \ldots + x_k \,|\, x_i \in L_i,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Представление (65.1) вектора x называется *разложением вектора x по подпространствам* $L_1, \ldots, L_k$.

Пересечением подпространств $L_1, \ldots, L_k$ называется множество

$$L_1 \cap \ldots \cap L_k = \{x \in V \,|\, x \in L_i,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Заметим, что пересечение подпространств не пусто, так как всегда содержит нулевой вектор θ пространства.

Теорема 65.1. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства V являются линейными подпространствами пространства V.*

Это утверждение вытекает из теоремы 18.1, так как для $\sum_{i=1}^{k} L_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} L_i$ справедливы обе импликации. ■

Заметим, что каждое из подпространств L_i, $i = \overline{1,k}$, а также их пересечение являются линейными подпространствами суммы $L_1 + \ldots + L_k$, а пересечение $L_1 \cap \ldots \cap L_k$ – линейным подпространством каждого из L_i, $i = \overline{1,k}$.

Теорема 65.2. *Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_m$, $f_1, \ldots, f_s$, $\ldots$, $g_1, \ldots, g_t$ – базисы подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_k$ соответственно. Положим $W = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s, \ldots, g_1, \ldots, g_t)$. Тогда $W = L_1 + \ldots + L_k$, так как для этих множеств, как нетрудно проверить, имеет место двустороннее вложение. ■

Следствие. Размерность суммы линейных подпространств равна рангу совокупности базисов слагаемых подпространств:

$$\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s, \ldots, g_1, \ldots, g_t).$$

Это утверждение вытекает из теоремы 65.2 (с учетом теоремы 64.3).

Теорема 65.3. *Для любых двух линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V имеет место соотношение*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 . \tag{65.2}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $L_1 \cap L_2 \neq \{\theta\}$. Выполним следующее построение. Пусть $f_1, \ldots, f_s$ – базис $L_1 \cap L_2$. Так как $L_1 \cap L_2 \subset L_1$, $L_1 \cap L_2 \subset L_2$, то согласно теореме о неполном базисе векторы $f_1, \ldots, f_s$ можно дополнить как до базиса L_1, так и до базиса L_2. Пусть $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s$ – базис L_1, а $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t$ – базис L_2. Покажем, что система векторов

$$e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \tag{65.3}$$

образует базис $L_1 + L_2$. Действительно, она порождает $L_1 + L_2$ в силу теоремы 65.2 и, кроме того, она линейно независима, так как если

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i = \theta , \tag{65.4}$$

то

$$g = \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i . \tag{65.5}$$

Отсюда следует, что вектор g является вектором как L_1, так и L_2, т.е. $g \in L_1 \cap L_2$ и, следовательно, вектор g является линейной комбинацией векторов $f_1, \ldots, f_s$. Из единственности разложения вектора g по линейно независимой системе векторов $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s$ следует, что в (65.5) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Тогда в (65.4) в силу линейной независимости $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t$ получим, что $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0$. Таким образом, только тривиальная линейная комбинация векторов (65.3) равна нулевому вектору. Итак, векторы (65.3) образуют базис $L_1 + L_2$ и, следовательно,

$$\dim(L_1 + L_2) = m + s + t . \tag{65.6}$$

С другой стороны, согласно схеме построения векторов (65.3),

$$\dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 = (m + s) + (s + t) - s = m + s + t .$$

Сравнение этого соотношения с (65.6) дает (65.2). В случае когда $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, доказательство проводится аналогично, только в нем не участвуют векторы $f_1, \ldots, f_s$. ■

§ 66. Прямая сумма подпространств

Критерии прямой суммы. Сумма подпространств линейного пространства называется *прямой суммой*, если разложение каждого вектора в ней по слагаемым подпространствам единственно.
Обозначение: $L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Теорема 66.1 (критерии прямой суммы). *Для подпространств $L_1, \ldots, L_k$ конечномерного линейного пространства V следующие утверждения равносильны:*

1) *сумма подпространств $L_1, \ldots, L_k$ – прямая;*

2) *совокупность базисов подпространств $L_1, \ldots, L_k$ линейно независима;*

3) *совокупность базисов подпространств $L_1, \ldots, L_k$ образует базис суммы $\sum_{i=1}^{k} L_i$;*

4) $\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \sum_{i=1}^{k} \dim L_i$;

5) *существует вектор $a \in \sum_{i=1}^{k} L_i$, для которого разложение по подпространствам $L_1, \ldots, L_k$ единственно;*

6) *произвольная система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_k$, взятых по одному из каждого подпространства L_i, $i = \overline{1,k}$, линейно независима;*

7) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ *(для $k = 2$).*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Пусть совокупность $e_1, \ldots, e_m$, $f_1, \ldots, f_s, \ldots, g_1, \ldots, g_t$ базисов подпространств $L_1, \ldots, L_k$ линейно зависима и

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \ldots + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i = \theta, \tag{66.1}$$

где

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i^2 \neq 0. \tag{66.2}$$

Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i, \quad \ldots, \quad x_k = \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i.$$

Отметим, что $x_i \in L_i$, $i = \overline{1,k}$, причем среди $x_1, \ldots, x_k$ в силу (66.2) и линейной независимости векторов каждого базиса существует вектор $x_i \neq \theta$. Тогда соотношение (66.1) может быть записано в виде

$$\theta = x_1 + \ldots + x_i + \ldots + x_k, \; x_i \neq \theta. \tag{66.3}$$

Это дает второе разложение нулевого вектора θ (после известного: $\theta = \theta + \ldots + \theta + \ldots + \theta$) по подпространствам $L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_k$.

2 $\Rightarrow$ 1. Пусть $L_1 + \ldots + L_k$ – не прямая сумма. Тогда существует вектор b из этой суммы, который имеет два разложения по подпространствам $L_1, \ldots, L_k$:

$$b = b_1 + \ldots + b_i + \ldots + b_k\,, \tag{66.4}$$

$$b = b'_1 + \ldots + b'_i + \ldots + b'_k\,, \tag{66.5}$$

отличающиеся хотя бы одним слагаемым $b_i \neq b'_i$. Если вычесть из первого равенства второе и разложить каждое слагаемое $b_j - b'_j$, $j = \overline{1,n}$, по базису L_j, то получим нетривиальную линейную комбинацию базисных векторов пространств $L_1, \ldots, L_k$, равную нулевому вектору. Это противоречит линейной независимости совокупности базисов $L_1, \ldots, L_k$.

2 $\Longleftrightarrow$ 3. Это следует из теоремы 65.2.

3 $\Longleftrightarrow$ 4. Эти утверждения отличаются только терминологией.

1 $\Rightarrow$ 5. Это очевидно.

5 $\Rightarrow$ 1. Пусть $L_1 + \ldots + L_k$ – не прямая сумма. Тогда существует вектор b из этой суммы, для которого имеют место два различных разложения (66.4) и (66.5). Вычитая (66.5) из (66.4), получим нетривиальное разложение нулевого вектора (66.3). Если его сложить с разложением вектора a, то получим еще одно разложение вектора a.

1 $\Rightarrow$ 6. Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_k$, где $a_i \in L_i$, $a_i \neq \theta$, $i = \overline{1,k}$, линейно зависима. Тогда существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in P$, одновременно не равные нулю (пусть, например, $\alpha_i \neq 0$) и такие, что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_i a_i + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$. Это равенство дает второе разложение нулевого вектора, отличное от тривиального (так как $\alpha_i a_i \neq \theta$), что противоречит утверждению 1.

6 $\Rightarrow$ 1. Пусть $L_1 + \ldots + L_k$ – не прямая сумма, тогда существует вектор b, для которого имеют место два разложения (66.4) и (66.5). Вычитая одно из другого, получим, что $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_q} = \theta$, где $a_{i_m} = b_{i_m} - b'_{i_m}$, $a_{i_m} \in L_{i_m}$, причем $a_{i_m} \neq 0$ хотя бы для одного m, $m = \overline{1,q}$. Значит, векторы $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_q}$ линейно зависимы и, следовательно, любая система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого L_i, $i = \overline{1,k}$, содержащая эти векторы, линейно зависима (в силу теоремы 14.3). Это противоречит утверждению 6.

4 $\Longleftrightarrow$ 7. Это следует из теоремы 65.3. ■

Теорема 66.2. *Линейное пространство V является прямой суммой двух своих подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда:*

1) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$;

2) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 66.1 (утверждения 4 и 7).

Достаточность. Из условия 2 следует, что $L_1 + L_2$ – прямая сумма. Положим $L = L_1 \oplus L_2$. Согласно теореме 66.1 (утверждение 4) $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2$. Отсюда в силу условия 1 вытекает, что $\dim L = \dim V$. Это означает, что $L = V$ (теорема 64.3), т.е. $V = L_1 \oplus L_2$. ■

Дополнительное подпространство. Пусть L – линейное подпространство пространства V. Подпространство L^δ называется *дополнительным подпространством к* L (рис. 1), если $L \oplus L^\delta = V$. Очевидно, что при этом L – дополнительное подпространство к L^δ.

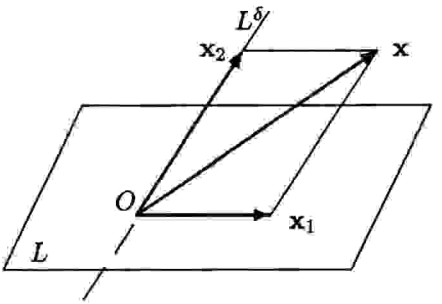


Рис. 1

Теорема 66.3. *Для любого подпространства L линейного пространства V существует дополнительное подпространство.*

Доказательство. Будем считать, что L – нетривиальное подпространство (если $L = \{\theta\}$, то $L^\delta = V$, а если $L = V$, то $L^\delta = \{\theta\}$). Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис L. Дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ всего пространства V. Тогда $\mathcal{L}(e_{k+1}, \ldots, e_n) = L^\delta$, так как для подпространства $\mathcal{L}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ выполнены все условия теоремы 66.2. ■

Замечание. В случае если L – нетривиальное подпространство, дополнительное подпространство определено неоднозначно.

§ 67. Линейное аффинное многообразие

Линейное аффинное многообразие и связанные с ним понятия были определены в §18. Там же приведены некоторые элементарные утверждения, относящиеся к вещественному линейному пространству. Все они остаются в силе и в линейном пространстве над произвольным полем P (с очевидной заменой поля $\mathbb{R}$ на поле P).

Параллельные многообразия. Линейные многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ в линейном пространстве V называются *параллельными*, если либо $L_1 \subset L_2$, либо $L_2 \subset L_1$ (рис. 1).

Теорема 67.1. *Если два линейных многообразия с непустым пересечением параллельны, то одно из них содержит другое.*

Доказательство. Пусть линейные аффинные многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ параллельны и пусть

$$L_1 \subset L_2. \tag{67.1}$$

По условию существует вектор $x_0 \in H_1 \cap H_2$. Так как вектором сдвига может служить любой вектор линейного многообразия (§18), то $H_1 = x_0 + L_1$, $H_2 = x_0 + L_2$. Отсюда с учетом (67.1) следует, что $H_1 \subset H_2$. ■

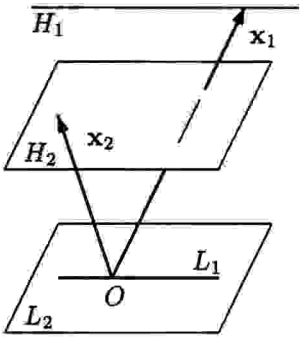


Рис. 1

Следствие 1. *Если линейные многообразия параллельны, то либо они не пересекаются, либо одно из них содержится в другом.*

Пересечение многообразий.

Теорема 67.2. *Непустое пересечение линейных многообразий* $H_i = x_i + L_i$, $i = \overline{1,k}$, *является линейным многообразием с направляющим подпространством* $\bigcap\limits_{i=1}^{k} L_i$.

Доказательство. По условию существует вектор $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i$, следовательно, $H_i = x_0 + L_i$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i = x_0 + \bigcap\limits_{i=1}^{k} L_i$, так как для этих множеств имеет место двустороннее вложение. ■

Теорема 67.3. *Всякое* k*-мерное линейное многообразие в* n*-мерном пространстве можно задать в виде пересечения* $n - k$ *гиперплоскостей.*

Доказательство. Пусть $H = x_0 + L$ – k-мерное линейное многообразие и $e_1, \ldots, e_k$ – базис подпространства L. Дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пространства V. В качестве искомых гиперплоскостей можно взять линейные многообразия $H_i = x_0 + L_i$, $i = \overline{1, n-k}$, где

$$L_1 = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+2}, e_{k+3}, \ldots, e_n),$$
$$L_2 = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+3}, \ldots, e_n),$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$L_{n-k} = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n-1}),$$

т.е. L_i – линейная оболочка всех векторов базиса V, кроме e_{k+i}.

Очевидно, что $L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{n-k} = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = L$. В силу теоремы 67.2 отсюда следует, что $H = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_{n-k}$. Так как $\dim L_i = n - 1$, $i = \overline{1, n-k}$, то все H_i – гиперплоскости. ■

Теорема 67.4. *Пересечение линейного многообразия* $H = x_0 + L$ *с любым подпространством, дополнительным к* L, *состоит ровно из одного вектора.*

Доказательство. Пусть L^δ – дополнительное подпространство к L. Так как $L \oplus L^\delta = V$, то для вектора x_0 имеет место разложение $x_0 = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\delta$. Тогда $z = x_0 - y \in H$, ибо $-y \in L$. Следовательно, z – общий вектор L^δ и H, т.е. $z \in L^\delta \cap H$.

Покажем, что z – единственный вектор пересечения $L^\delta \cap H$. Пусть $z' \in L^\delta \cap H$, тогда так как $z \in H$, $z' \in H$, то (§18) $z - z' \in L$, а так как $z \in L^\delta$, $z' \in L^\delta$, то $z - z' \in L^\delta$. Из того, что $L \cap L^\delta = \{\theta\}$, следует, что $z - z' = \theta$, т.е. $z = z'$. ■

Фактор-пространство. Пусть V – линейное пространство над полем P, L – некоторое его линейное подпространство. Рассмотрим множество $V|L$ всех линейных многообразий с направляющим подпространством L: $V|L = \{H = x + L \,|\, x \in V\}$. Введем на этом множестве операции сложения и умножения на число из поля P.

Определим сумму многообразий $H_1 = x_1 + L$, $H_2 = x_2 + L$ по следующему правилу:

$$H_1 + H_2 = (x_1 + x_2) + L. \tag{67.2}$$

Это определение корректно, так как результат не зависит от выбора векторов сдвига многообразий H_1, H_2. Фактически эта операция совпадает с известной операцией сложения смежных классов по нормальному делителю, т.е. с алгебраической операцией в факторгруппе (§40). Таким образом, правило (67.2) определяет внутренний закон композиции на $V|L$ (рис. 2).

Определим умножение многообразия $H = x_0 + L$ на число $\alpha \in P$ по следующему правилу:

$$\alpha H = \alpha x_0 + L. \tag{67.3}$$

Проверим корректность этого определения, т.е. что результат не зависит от выбора вектора сдвига x_0. Пусть $H = x_0' + L$. Покажем, что

$$\alpha x_0 + L = \alpha x_0' + L. \tag{67.4}$$

Для любого элемента $\alpha x_0 + y$, $y \in L$, из левого множества имеем $\alpha x_0 + y = \alpha(x_0' + x_0 - x_0') + y = \alpha x_0' + \alpha(x_0 - x_0') + y = \alpha x_0' + y_1$, где $y_1 = \alpha(x_0 - x_0') + y \in L$, так как $x_0 - x_0' \in L$, $y \in L$. Следовательно, $\alpha x_0 + L \subset \alpha x_0' + L$. С другой стороны, для элемента из правого множества $\alpha x_0' + y$, $y \in L$, имеем $\alpha x_0' + y = \{x_0' = x_0 + y_1$, где $y_1 \in L\} = \alpha(x_0 + y_1) + y = \alpha x_0 + \alpha y_1 + y = \alpha x_0 + y_2$, где $y_2 = \alpha y_1 + y \in L$. Следовательно, $\alpha x_0' + L \subset \alpha x_0 + L$. Оба вложения доказывают (67.4).

Таким образом, правило (67.3) определяет внешний закон композиции на $V|L$ (рис. 3).

Теорема 67.5. *Множество $V|L$ всех линейных многообразий с направляющим подпространством L есть линейное пространство относительно законов композиции* (67.2), (67.3).

Доказательство. Справедливость аксиом группы сложения вытекает из того, что $V|L$ – факторгруппа. Впрочем, непосредственная

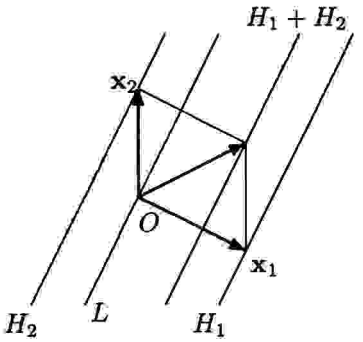


Рис. 2

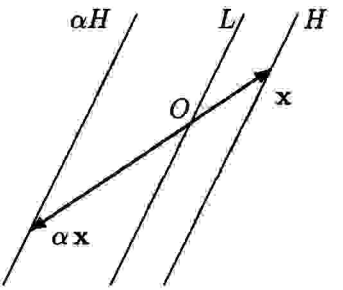


Рис. 3

проверка этих аксиом так же проста, как и проверка остальных аксиом линейного пространства, ее мы предоставляем читателю. ■

Линейное пространство $V|L$ называется *фактор-пространством линейного пространства V по подпространству L*.

Теорема 67.6. *Фактор-пространство $V|L$ изоморфно L^δ.*

Доказательство. Если $L = \{\theta\}$, то $L^\delta = V$, $V|L = V$ и, следовательно, $V|L \cong L^\delta$. Если $L = V$, то $L^\delta = \{\theta\}$, $V|L = \{\theta\}$ и $V|L \cong \{\theta\}$. Пусть $0 < \dim L < \dim V$ и L^δ – какое-нибудь дополнительное подпространство к L. Согласно теореме 67.4 в каждом многообразии $H = x + L$ существует, и притом единственный, вектор $z \in L^\delta$, так что $H = z + L$. Таким образом, $V|L = \{H = z + L \,|\, z \in L^\delta\}$. Отображение $\varphi : L^\delta \to V|L$, которое каждому вектору $z \in L^\delta$ ставит в соответствие линейное аффинное многообразие $H = z + L \in V|L$, биективно в силу теоремы 67.4, оно сохраняет законы композиции в силу (67.2), (67.3). Таким образом, φ – изоморфизм. ■

Следствие 2. $\dim V|L = \dim V - \dim L$.

Глава XIII. Евклидовы и унитарные пространства

Линейные пространства, изучавшиеся нами до сих пор, несмотря на абстрактный характер, по своим свойствам очень близки к геометрическим пространствам. Однако в них еще не нашли отражение понятия, связанные с измерениями, такие, как длина вектора и угол между векторами. В §22 мы установили, что эти величины тесно связаны с понятием скалярного произведения векторов. Они просто выражаются через скалярное произведение, а само скалярное произведение векторов оказывается при этом весьма простой с точки зрения алгебры функцией: оно линейно по каждой из двух переменных. Это дает основание при введении метрических понятий в теории линейных пространств отталкиваться от понятия скалярного произведения.

В этой главе рассматриваются только вещественные и комплексные пространства. Итак, V – линейное пространство над полем P, где P – либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$.

§ 68. Скалярное произведение

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пространство. Отображение

$$(\ ,\ ):\quad V \times V \to P$$

называется *скалярным произведением*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам: для любых $x, y, z \in V$ и любого $\alpha \in P$

$$\begin{array}{ll} 1) & (x,y) = \overline{(y,x)}\,; \\ 2) & (\alpha x, y) = \alpha (x,y)\,; \\ 3) & (x+y,z) = (x,z) + (y,z)\,; \\ 4) & (x,x) \geq 0 \text{ для любого } x \in V, \\ & (x,x) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = \theta\,. \end{array} \tag{68.1}$$

Число (x,y) называется *скалярным произведением векторов x и y*, аксиомы 1 – 4 называются *аксиомами скалярного произведения*.

Замечание 1. В вещественном случае черта в первой аксиоме может быть опущена.

Замечание 2. Аксиома 4 в комплексном случае на первый взгляд кажется парадоксальной, так как для комплексных чисел знак не определен. Однако из первой аксиомы следует, что скалярный квадрат (x,x) есть вещественное число.

Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством*, а комплексное – *унитарным*. Обозначение: E и U соответственно.

Примеры. 1. В геометрических пространствах V_n, где $n = 1, 2, 3$, было введено скалярное произведение (22.1) на основании метрики, имеющейся на прямой, на плоскости и в пространстве. Оно удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения (теорема 22.2) и,

следовательно, является скалярным произведением и в принятом выше смысле. Аксиоматическое определение скалярного произведения говорит о том, что геометрическое правило (22.1) не является единственным скалярным произведением в пространствах V_n, $n = 1, 2, 3$.

2. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ может быть введено следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i , \tag{68.2}$$

а в арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ –

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} . \tag{68.3}$$

Для скалярных произведений (68.2) и (68.3) аксиомы (68.1) легко проверяются непосредственно.

Скалярные произведения (68.2) и (68.3) называются *естественными скалярными произведениями* в арифметических пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ соответственно.

Для естественных скалярных произведений может быть использована компактная форма записи: если арифметические векторы x и y записать как столбцы, т.е. $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, то

$$(x, y) = x^T y = y^T x \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n,$$
$$(x, y) = x^T \overline{y} = y^H x \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^n.$$

3. В функциональном пространстве $C[0, 1]$ скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ может быть задано так:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx . \tag{68.4}$$

Справедливость аксиом (68.1) вытекает из свойств определенного интеграла [11].

Итак, операции (68.2)–(68.4) определены корректно и превращают пространства V_n, $\mathbb{R}^n$, $C[0, 1]$ в евклидовы пространства, а пространство $\mathbb{C}^n$ – в унитарное.

Из определения скалярного произведения вытекают следующие *простейшие свойства* этой операции.

1°. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$, $\forall x, y, z \in E$ (U).

2°. $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$, $\forall x, y \in E$ (U), $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$).

3°. $(\theta, x) = (x, \theta) = 0$, $\forall x \in E$ (U).

4°. $(x, y) = 0$ для любого вектора $y \in E$ (U) тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

5°. Любое подпространство L евклидова (унитарного) пространства является евклидовым (соответственно унитарным) пространством.

Отметим, что скалярное произведение (x, y) векторов x, y линейно по первому аргументу, а в евклидовом пространстве – линейно по обоим аргументам (свойства 1° и 2°).

Теорема 68.1. *Для любых векторов $x, y \in E\ (U)$ имеет место неравенство*

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y) \tag{68.5}$$

или, в другой форме,

$$\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix} \ge 0\,.$$

Доказательство. Будем считать, что $x \ne \theta$ (для $x = \theta$ неравенство (68.5), очевидно, обращается в равенство). Для любых векторов $x, y \in E\ (U)$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, согласно (68.1) и свойствам 1°–4°, имеем

$$0 \le (\alpha x - y, \alpha x - y) = (\alpha x, \alpha x) - (\alpha x, y) - (y, \alpha x) + (y,y) =$$
$$= |\alpha|^2 (x,x) - \alpha(x,y) - \overline{\alpha}(y,x) + (y,y)\,. \tag{68.6}$$

Так как $x \ne \theta$, то $(x,x) \ne 0$. Возьмем $\alpha = (y,x)/(x,x)$. Тогда из (68.6) имеем $0 \le \dfrac{|(y,x)|^2}{(x,x)^2}(x,x) - \dfrac{(y,x)(x,y)}{(x,x)} - \dfrac{(x,y)(y,x)}{(x,x)} + (y,y)$, откуда после очевидных преобразований получим (68.5). ■

Неравенство (68.5) называется *неравенством Коши–Буняковского.*

Замечание 3. В евклидовом пространстве неравенство Коши–Буняковского может быть записано в виде $(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$.

Теорема 68.2. *Неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.*

Доказательство этой теоремы фактически содержится в доказательстве теоремы 68.1. Действительно, если $x = \theta$, то $x = 0y$. Если же $x \ne \theta$, то неравенство (68.6) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $0 = (\alpha x - y, \alpha x - y)$, т.е. когда $y = \alpha x$. ■

§ 69. Основные метрические понятия

В евклидовом и унитарном пространствах *длиной* вектора x называется арифметическое значение квадратного корня из его скалярного квадрата. Обозначение: $|x|$. Итак, $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Из аксиом скалярного произведения вытекают следующие факты.

1°. Любой вектор x евклидова (и унитарного) пространства имеет длину, при этом $|x| \ge 0$, $\forall x \in E\ (U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

2°. $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E\ (U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$).

В новой терминологии неравенство Коши–Буняковского может быть записано следующим образом:

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|. \tag{69.1}$$

Вектор единичной длины называется *нормированным*. Любой ненулевой вектор можно нормировать, разделив этот вектор на его длину.

По аналогии с элементарной геометрией упорядоченная тройка векторов $x, y, x+y$ рассматривается как треугольник, о котором говорят, что он построен на векторах x и y. Точно так же считается, что параллелограмм, построенный на векторах x и y, имеет диагонали $x+y$ и $x-y$.

Теорема 69.1. *В евклидовом (унитарном) пространстве для любых векторов x, y имеют место неравенства*

$$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|. \tag{69.2}$$

Доказательство. Имеем $|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$. Применив к этой сумме числовые неравенства треугольника (которые справедливы как для вещественных, так и для комплексных чисел), с учетом неравенства (69.1) получим, что

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$
$$|x+y|^2 \geq |x|^2 - 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2.$$

Отсюда следует (69.2). ■

Неравенства (69.2) называются *неравенствами треугольника в евклидовом (унитарном) пространстве*.

Очевидно, эти неравенства переносят известное из элементарной геометрии свойство сторон треугольника на произвольное евклидово (и унитарное) пространство. Точно так же легко проверяемое равенство

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2), \tag{69.3}$$

называемое *тождеством параллелограмма*, справедливо в евклидовом (и унитарном) пространстве.

В евклидовом пространстве *углом между* ненулевыми *векторами* x и y называется угол φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}. \tag{69.4}$$

Корректность этого определения следует из неравенства Коши–Буняковского (69.1).

В унитарном пространстве понятие угла между векторами не определено. Однако и в евклидовом, и в унитарном пространстве можно ввести обобщение понятия прямого угла.

§ 70. Ортогональные векторы

Ортонормированный базис. Два вектора $x, y \in E\,(U)$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Из свойства 4° скалярного произведения (§68) следует, что нулевой вектор θ, и только нулевой, ортогонален любому вектору пространства.

В евклидовом пространстве вследствие равенства (69.4) ортогональность векторов x и y означает, что либо один из них нулевой, либо угол между ними равен $\pi/2$.

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства $E(U)$. Вектор x называется *ортогональным подпространству* L, если он ортогонален любому вектору $y \in L$. Обозначение: $x \perp L$.

Очевидно, что $x \perp \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ тогда и только тогда, когда $x \perp a_i$, $i = \overline{1,k}$.

Два подпространства L_1 и L_2 называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$, $\forall x \in L_1$, $y \in L_2$. Обозначение: $L_1 \perp L_2$.

Сумма подпространств $\sum_{i=1}^{k} L_i$ называется *ортогональной суммой*, если ее слагаемые подпространства попарно ортогональны.

Система векторов $x_1, \ldots, x_k \in E\,(U)$ называется *ортогональной системой*, если

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j\,. \tag{70.1}$$

Система векторов $x_1, \ldots, x_k \in E\,(U)$ называется *ортонормированной системой*, если $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j\,, \\ 0, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{70.2}$$

Теорема 70.1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_k \in E\,(U)$ – ортогональная система ненулевых векторов. Умножая обе части равенства

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_i x_i + \ldots + \alpha_k x_k = \theta \tag{70.3}$$

скалярно на x_i, получаем в силу (70.1)

$$\alpha_i (x_i, x_i) = 0\,, \quad i = \overline{1,k}\,. \tag{70.4}$$

По условию $x_i \neq \theta$, значит, $(x_i, x_i) \neq 0$, и в силу (70.4) все коэффициенты линейной комбинации в (70.3) равны нулю. Следовательно, векторы рассматриваемой системы линейно независимы. ■

Следствие 1. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

Следствие 2. *В n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве любая ортонормированная система из n векторов образует базис.*

Базис, векторы которого образуют ортонормированную систему, называется *ортонормированным базисом*. В соответствии с (70.2) $e_1, \ldots, e_k$ – ортонормированный базис $E\,(U)$, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{70.5}$$

Теорема 70.2. *В евклидовом (унитарном) пространстве координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x в базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ вычисляются по правилу*

$$x_i = (x, e_i), \quad i = \overline{1,n}, \tag{70.6}$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис.

Доказательство. Необходимость. Пусть для любого вектора $x \in E\,(U)$ координаты в базисе e вычисляются согласно (70.6). Тогда по этому же правилу вычисляются координаты и базисных векторов, которые известны, так как

$$e_i = 0e_1 + \ldots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \ldots + 0e_n, \quad i = \overline{1,n}.$$

Сравнение координат вектора e_i с правилом (70.6) приводит к требуемым равенствам (70.5).

Достаточность. Если e – ортонормированный базис и $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, то свойство линейности скалярного произведения с учетом (70.5) приводит к (70.6). ■

Теорема 70.3. *В евклидовом (унитарном) пространстве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{70.7}$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис.

Доказательство. Необходимость. Если скалярное произведение вычисляется согласно (70.7) для любой пары векторов, то это же верно и для пары базисных векторов e_i и e_j, координаты которых известны. Применив правило (70.7) к вычислению скалярного произведения векторов e_i и e_j, получим требуемые равенства (70.5).

Достаточность. Если e – ортонормированный базис и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, то в силу свойства линейности скалярного произведения имеем

$$(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}. \blacksquare$$

Замечание. В евклидовом пространстве черта в равенстве (70.7) может быть опущена: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Скалярное произведение (70.7) может быть записано в компактной форме через координатные столбцы x_e и y_e векторов x и y в базисе e следующим образом:

$(x,y) = x_e^T y_e = y_e^T x_e$ для евклидова пространства,

$(x,y) = x_e^T \bar{y}_e = y_e^H x_e$ для унитарного пространства.

До сих пор все базисы линейного пространства были равноправны. С помощью любого базиса можно сводить операции сложения векторов и умножения вектора на число к операциям над числами. В евклидовом и унитарном пространствах теорема 70.3 отводит ортонормированному базису особую роль: с помощью такого базиса и третья операция – скалярное произведение векторов – сводится к операциям над числами. Возникает естественный вопрос, всегда ли существует ортонормированный базис.

Теорема 70.4. *В конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Используем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно: достаточно взять любой вектор $f \neq \theta$ и положить $e_1 = f/|f|$.

Пусть в любом $(n-1)$-мерном евклидовом (унитарном) пространстве существует ортонормированный базис; покажем, что ортонормированный базис существует и в n-мерном пространстве E (U). Пусть $f_1, \ldots, f_n$ – базис E (U). Линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_{n-1})$ является $(n-1)$-мерным пространством, и в нем по индуктивному предположению существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Так как $f_n \notin \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_{n-1}) = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_{n-1})$, то вектор $g_n = f_n - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_{n-1} e_{n-1}$ отличен от нулевого вектора при любых $\alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Выберем коэффициенты α_i, $i = \overline{1, n-1}$, из условия ортогональности вектора g_n всем векторам $e_1, \ldots, e_{n-1}$: $0 = (g_n, e_i) = (f_n, e_i) - \alpha_i$, $i = \overline{1, n-1}$, или $\alpha_i = (f_n, e_i)$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда, положив $e_n = g_n/|g_n|$, получим ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства E (U). ■

Процесс ортогонализации. Доказательство теоремы 70.4, по существу, представляет собой алгоритм последовательного построения ортонормированного базиса по заданному базису $f_1, \ldots, f_n$.

Первый шаг. Полагая $g_1 = f_1$, находим $e_1 = g_1/|g_1|$.

k-й шаг $(k \geq 2)$. Полагаем

$$g_k = f_k - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_{k-1} e_{k-1}, \tag{70.8}$$

где $\alpha_i = (f_k, e_i)$, $i = \overline{1, k-1}$, и находим $e_k = g_k/|g_k|$.

Через n шагов получим ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства. Описанный алгоритм называется *процессом ортогонализации Грама–Шмидта.*

Ортогональная (унитарная) матрица. Матрица $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется *унитарной*, если

$$UU^H = U^H U = I, \tag{70.9}$$

матрица $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *ортогональной*, если

$$QQ^T = Q^T Q = I. \tag{70.10}$$

Напомним, что в §24 уже рассматривались ортогональные матрицы в связи с ортонормированным базисом геометрических прост-

ранств. В произвольном евклидовом (унитарном) пространстве имеет место то же утверждение.

Теорема 70.5. *Матрица перехода от ортонормированного базиса* $\mathbf{e}$ *к базису* $\mathbf{e}'$ *евклидова (унитарного) пространства ортогональна (унитарна) тогда и только тогда, когда* $\mathbf{e}'$ *ортогональный базис.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 24.1 с учетом соотношений (70.5), (70.7), (70.9), (70.10). ■

***QR*-разложение.** Процесс ортогонализации Грама–Шмидта, описанный в матричной форме, дает еще одну факторизацию матрицы.

Пусть $A = [a_1 \dots a_n]$ – вещественная или комплексная матрица размера $n \times n$ с линейно независимыми столбцами $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$). В результате применения процесса ортогонализации к этим столбцам относительно естественного скалярного произведения в арифметическом пространстве получатся ортонормированные столбцы $q_1, \dots, q_n$, которые образуют ортогональную (соответственно унитарную) матрицу $Q = [q_1 \dots q_n]$. Сам процесс ортогонализации означает последовательное умножение матрицы A справа на некоторые матрицы элементарных преобразований. Так как $q_i \in \mathcal{L}(a_i, q_1, \dots, q_{i-1})$, $i = \overline{1,n}$, то на i-м шаге матрица A_{i-1} (полученная после $(i-1)$ шагов) умножится справа на матрицу

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_{1i} & \dots & 0 \\ & 1 & \dots & \alpha_{2i} & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

так что весь процесс ортогонализации укладывается в матричную схему

$$AL_1 \dots L_n = Q \quad \text{или} \quad AL = Q,$$

где L – верхняя треугольная матрица (как произведение верхних треугольных матриц), т.е.

$$A = QR, \tag{70.11}$$

где Q – ортогональная (соответственно унитарная), а $R = L^{-1}$ – верхняя треугольная матрицы.

Разложение (70.11) называется *QR-разложением матрицы* A.

Если A – прямоугольная матрица размера $m \times n$ с линейно независимыми столбцами, то очевидно, что $m \geq n$, а матрица Q будет прямоугольной матрицей размера $m \times n$ с ортонормированными столбцами $q_1, \dots, q_n$.

Теорема Пифагора и ее обобщение. Если векторы x и y ортогональны, то треугольник, построенный на этих векторах, называют прямоугольным, а вектор $x + y$ – гипотенузой этого треугольника.

Легко проверить, что

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2, \tag{70.12}$$

а, в более общем случае, если $x_1, \ldots, x_k$ – попарно ортогональны и $z = x_1 + \ldots + x_k$, то

$$|z|^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2, \tag{70.13}$$

Равенство (70.12) называют *теоремой Пифагора в евклидовом (и унитарном) пространстве*, а равенство (70.13) – ее *обобщением*.

§ 71. Матрица Грама

Матрицей Грама системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ евклидова (унитарного) пространства называется матрица

$$G(a_1, \ldots, a_k) = \begin{bmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{bmatrix}. \tag{71.1}$$

Определитель матрицы Грама называется *определителем Грама*.

Теорема 71.1. *Система векторов* $a_1, \ldots, a_k$ *евклидова (унитарного) пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда* $\det G(a_1, \ldots, a_k) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим вектор $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$. Так как $y \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$, то равенство $y = \theta$ равносильно ортогональности вектора y любому вектору из $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$, что в свою очередь равносильно ортогональности вектора y векторам $a_1, \ldots, a_k$, т.е.

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1(a_1, a_k) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0. \end{cases} \tag{71.2}$$

Линейная зависимость векторов $a_1, \ldots, a_k$ означает наличие нетривиального набора коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, для которых $y = \theta$, т.е. наличие нетривиального решения однородной системы уравнений (71.2) с матрицей $G^T(a_1, \ldots, a_k)$, а это согласно теореме 28.6 означает равенство $\det G(a_1, \ldots, a_k) = 0$. ■

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется *эрмитовой матрицей*, если

$$A^H = A; \tag{71.3}$$

матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *симметрической* (или *вещественной эрмитовой*) *матрицей*, если

$$A^T = A. \tag{71.4}$$

Из (71.3) следует, что $|A| \in \mathbb{R}$. Таким образом, для эрмитовых матриц (комплексных и вещественных) можно говорить о знаке определителя.

Теорема 71.2. *Матрица Грама системы векторов евклидова (унитарного) пространства эрмитова.*

Доказательство. Пусть $G(a_1, \ldots, a_n) = G = (g_{ij})$. Из (71.1) следует, что $g_{ij} = (a_i, a_j)$, $g_{ji} = (a_j, a_i)$, т.е. $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$. Это означает, что $G^H = G$ или, в вещественном случае, $G^T = G$. ■

Теорема 71.3. *Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пространстве положителен.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства. Тогда $\dim \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = k$. Выберем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_k$ линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$. Составим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

столбцами которой являются координаты векторов $a_1, \ldots, a_k$ в базисе $e = (e_1, \ldots, e_k)$. Тогда, согласно (70.7), $(a_i, a_j) = \sum_{s=1}^{k} a_{si}\overline{a_{sj}} = \sum_{s=1}^{k} a_{js}^h a_{si} = \{A^H A\}_{ji}$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,k}$. Следовательно,

$$G(a_1, \ldots, a_k) = (A^H A)^T \tag{71.5}$$

и $\det G(a_1, \ldots, a_k) = |\det A|^2$. Таким образом,

$$\det G(a_1, \ldots, a_k) \geq 0. \tag{71.6}$$

По условию система $a_1, \ldots, a_k$ линейно независима, поэтому, согласно теореме 71.1, $\det G(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$. Отсюда с учетом (71.6) следует, что $\det G(a_1, \ldots, a_k) > 0$. ■

Замечание. Равенство (71.5) дает компактную форму записи матрицы Грама; в частности, в вещественном случае

$$G(a_1, \ldots, a_k) = A^T A.$$

§ 72. Ортогональное дополнение

Задача о перпендикуляре. Совокупность всех векторов $x \in E$ (U), ортогональных подпространству L, называется *ортогональным дополнением* к L. Обозначение: $L^\perp$.

Теорема 72.1. *Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in L^\perp$, тогда $(y_1, x) = (y_2, x) = 0$ для любого вектора $x \in L$. Складывая эти равенства, получим, что

$(y_1 + y_2, x) = 0$, $\forall x \in L$, т.е. $y_1 + y_2 \in L^\perp$. Аналогично если $(y, x) = 0$, $\forall x \in L$, то $(\alpha y, x) = 0$, т.е. $\alpha y \in L^\perp$. Отсюда на основании теоремы 18.1 следует, что $L^\perp$ – линейное подпространство. ■

Теорема 72.2. *Если L – линейное подпространство $E(U)$, то*

$$L \oplus L^\perp = E(U). \tag{72.1}$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если L – тривиальное подпространство. Пусть L – нетривиальное подпространство. Возьмем $e_1, \ldots, e_k$ – ортонормированный базис L, $e_{k+1}, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис $L^\perp$. Система векторов $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ ортонормирована и, следовательно, линейно независима (теорема 70.1). Покажем, что она образует базис всего пространства $E(U)$. Пусть это не так. Тогда существует вектор f пространства, который не является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_n$. Система векторов $e_1, \ldots, e_n, f$ линейно независима, и применение к ней процесса ортогонализации приводит к вектору e_{n+1}, который ортогонален $e_1, \ldots, e_n$ и, значит, $e_{n+1} \in L^\perp$. С другой стороны, $e_{n+1} \perp L^\perp$, так как e_{n+1} ортогонален $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Следовательно, $e_{n+1} = \theta$. Отсюда согласно (70.8) вытекает линейная зависимость $e_1, \ldots, e_n, f$, что противоречит допущению. Таким образом, система векторов $e_1, \ldots, e_n$ является базисом $E(U)$ и $\dim L + \dim L^\perp = \dim E\,(\dim U)$. Так как $L \cap L^\perp = \{\theta\}$, то согласно теореме 66.2 получаем (72.1). ■

Следствие. Если L – линейное подпространство $E(U)$, то для любого вектора $f \in E(U)$ существует, и притом единственное, разложение

$$f = g + h, \tag{72.2}$$

где $g \in L$, $h \perp L$.

Вектор g в разложении (72.2) называется *ортогональной проекцией вектора f на подпространство L*, а вектор h – *ортогональной составляющей вектора f*.

Задачу разложения (72.2) вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую называют *задачей о перпендикуляре*. Этот термин заимствован из геометрии. С разложением (72.2) геометрического вектора мы уже встречались (рис. 1): чтобы получить это разложение, достаточно опустить перпендикуляр из конца вектора f на плоскость L. Имея в виду эту аналогию, ортогональную составляющую h в разложении (72.2) называют *перпендикуляром, опущенным из вектора f на подпространство L*, а сам вектор f – *наклонной к подпространству L*.

Аналогия с геометрическими векторами состоит не только в названии. Отметим некоторые свойства составляющих g и h в разложении (72.2), которые имеют место и в геометрии: так как $|f|^2 = (g + h, g + h) = (g, g) + (h, h)$, то

$$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2, \tag{72.3}$$

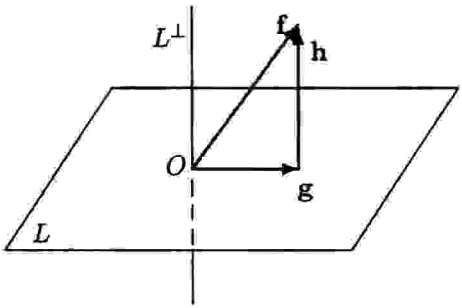


Рис. 1

$$|h| \le |f|\,.$$

Последнее неравенство означает, что *длина перпендикуляра не превосходит длины наклонной.*

Решение задачи о перпендикуляре. Из теоремы 72.2 следует, что задача о перпендикуляре имеет, и притом единственное, решение. Укажем один из способов построения этого решения.

Пусть $L = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$. Разложение (72.2) равносильно задаче построения векторов g и h таких, что

$$\left\{\begin{array}{l} f = g + h, \\ g \in L, \\ h \perp L \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g = \sum_{j=1}^k x_j a_j, \\ f - g \perp L, \\ h = f - g \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (f - g, a_i) = 0\,,\ i = \overline{1,k}, \\ g = \sum_{j=1}^k x_j a_j, \\ h = f - g \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (g, a_i) = (f, a_i)\,,\ i = \overline{1,k}, \\ g = \sum_{j=1}^k x_j a_j, \\ h = f - g \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\sum_{j=1}^k x_j a_j, a_i) = (f, a_i)\,,\ i = \overline{1,k}, \\ g = \sum_{j=1}^k x_j a_j, \\ h = f - g. \end{array}\right.$$

Итак, задача о перпендикуляре сводится к поиску чисел $x_1, \dots, x_k$, для которых

$$\sum_{j=1}^k x_j (a_j, a_i) = (f, a_i)\,,\ i = \overline{1,k}\,. \tag{72.4}$$

Сравнение этих соотношений с (71.2) говорит о том, что числа $x_1, \dots, x_k$ являются решением системы уравнений с матрицей Грама $G(a_1, \dots, a_k)$ и правой частью (f, a_i), $i = \overline{1,k}$. Эта система всегда имеет решение, так как она равносильна задаче о перпендикуляре.

Отметим возможные при этом варианты.

1°. Если $a_1, \dots, a_k$ – ортонормированный базис L, то $G(a_1, \dots, a_k) = I$ и система (72.4) имеет единственное решение $x_i = (f, a_i)$, $i = \overline{1,k}$, при этом $g = \sum_{i=1}^k x_i a_i$, $h = f - g$.

2°. Если $a_1, \dots, a_k$ линейно независимы, то $\det G(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ и система (72.4) имеет единственное решение; решив систему (72.4), найдем $g = \sum_{i=1}^k x_i a_i$, $h = f - g$.

3°. Если $a_1, \ldots, a_k$ линейно зависимы, то $\det G(a_1, \ldots, a_k) = 0$ и система (72.4) имеет бесконечно много решений, которые соответствуют бесконечному числу разложений вектора g по линейно зависимой системе векторов $a_1, \ldots, a_k$.

§ 73. Линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве

Пусть $H = x_0 + L$ – линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Вектор $a \in H$, ортогональный L, называется *нормальным вектором линейного многообразия* H (рис. 1).

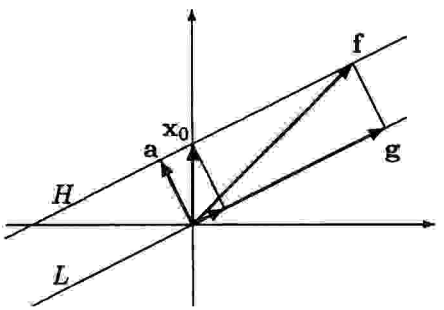


Рис. 1

Теорема 73.1. *Для любого линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве существует, и притом единственный, нормальный вектор.*

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие $H = x_0 + L$ (рис. 1). Все векторы из H, ортогональные L, находятся в $H \cap L^{\perp}$, но это пересечение состоит ровно из одного вектора a, так как $L^{\perp}$ – дополнительное подпространство к L (теоремы 72.2 и 67.4). Этот вектор a и будет единственным нормальным вектором для H. ■

Теорема 73.2. *Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из любого вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.*

Доказательство. Пусть a – нормальный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, тогда $H = a + L$ (§18). Следовательно, любой вектор $f \in H$ (рис. 1) может быть представлен в виде

$$f = a + g, \quad g \in L. \tag{73.1}$$

Так как $a \perp L$, то соотношение (73.1) совпадает с разложением вектора f на ортогональную проекцию g и перпендикуляр a. ■

Следствие. Среди всех векторов линейного многообразия нормальный вектор имеет наименьшую длину.

Уравнение гиперплоскости. Пусть $H = x_0 + L$ – гиперплоскость в E (U), т.е. $\dim L = n - 1$, где $n = \dim E$ ($\dim U$). Тогда $L^{\perp}$ – одномерное подпространство и его базис состоит из одного вектора a.

Вектор $x \in H$ тогда и только тогда, когда разность $x - x_0 \in L$, т.е. когда

$$(x - x_0, a) = 0\,. \tag{73.2}$$

Таким образом, уравнению (73.2) удовлетворяют все векторы x гиперплоскости H, и только они. Уравнение (73.2) может быть записано в равносильной форме:

$$(x, a) = p\,, \tag{73.3}$$

где $p = (x_0, a)$ – фиксированное число для данной гиперплоскости.

Уравнению (73.3) можно придать координатную форму: если $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(A_1, \ldots, A_n)$ – координаты векторов x и a в некотором ортонормированном базисе пространства, то уравнение (73.3) равносильно уравнению $A_1x_1 + \ldots + A_nx_n = p$, которое в геометрических пространствах совпадает с общим уравнением прямой на плоскости и плоскости в пространстве.

§ 74. Расстояние в евклидовом (унитарном) пространстве

Множество M называется *метрическим пространством*, если задано отображение

$$\rho \;:\; M \times M \to \mathbb{R}\,,$$

которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ такое, что:

1) $\rho(x, y) \geq 0\,, \quad \forall x, y \in M\,,$
$\rho(x, y) = 0 \iff x = y\,;$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)\,, \quad \forall x, y \in M\,;$
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)\,, \quad \forall x, y, z \in M\,.$

Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между x и y*; отображение ρ – *метрикой*, аксиомы 1–3 – *аксиомами метрики (расстояния)*.

Расстоянием между множествами X и Y в метрическом пространстве называется число

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X,\, y \in Y} \rho(x, y); \tag{74.1}$$

в частности, если $X = \{x\}$, то

$$\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x, y)$$

– расстояние между элементом x и множеством Y.

Примеры метрик. 1. Для действительных (или комплексных) чисел (т.е. $M = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) хорошо известное расстояние между числами $\rho(x, y) = |x - y|$ является метрикой.

2. Для арифметических векторов в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) отображение

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2},$$

как легко проверить, является метрикой. Эту метрику называют *естественной*. В гл. XIX будут рассмотрены и другие метрики в этих пространствах.

3. Для любого непустого множества отображение

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

является метрикой. Это один из примеров дискретной метрики.

Мы вернемся к метрическим пространствам в гл. XIX и рассмотрим новые понятия и факты, относящиеся к ним.

Теорема 74.1. *В евклидовом (унитарном) пространстве V отображение $\rho\colon V\times V\to\mathbb{R}$, определенное равенством*

$$\rho(x,y)=|x-y|, \tag{74.2}$$

задает метрику.

Доказательство. Действительно, правило (74.2) определяет отображение $\rho : V\times V\to\mathbb{R}$, которое отвечает всем аксиомам метрики. Проверка этих аксиом тривиальна, отметим лишь одну из них: $\rho(x,z)=|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\le|x-y|+|y-z|=\rho(x,y)+\rho(y,z)$, $\forall x,y,z\in V$. ■

Итак, евклидово (унитарное) пространство является метрическим пространством относительно метрики (74.2). В дальнейшем, говоря об евклидовом (унитарном) пространстве как о метрическом, будем иметь в виду именно эту метрику.

Теорема 74.2 (о кратчайшем расстоянии). *Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пространстве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L.*

Доказательство. Пусть $f=g+h$, где $g\in L$, $h\in L^{\perp}$, и y – произвольный вектор из L. Тогда $\rho(f,y)=|f-y|=|(g+h)-y|=|h+(g-y)|=\{$ в силу (72.3) $\}=\sqrt{|h|^2+|g-y|^2}$. Отсюда следует, что $\rho(f,y)\ge|h|$, $\forall y\in L$ и $\rho(f,y)=|h|$, если $y=g$. Это означает, что $|h|=\inf\limits_{y\in L}\rho(f,y)=\rho(f,L)$. ■

Эта теорема может быть сформулирована и в других терминах, а именно:

1) *расстояние между вектором f и подпространством L равно расстоянию между вектором f и его ортогональной проекцией на L;*

2) *среди всех векторов подпространства L ближе всего к вектору f расположена его ортогональная проекция на L.*

Теорема 74.3. *Пусть $H=x_0+L$ – линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Тогда*

$$\rho(f,H)=\rho(f-x_0,L).$$

Это утверждение следует из теоремы 74.2 и того, что для любого вектора $z = x_0 + y \in H$ справедливы равенства $\rho(f, z) = |f - z| = |(f - x_0) - y| = \rho(f - x_0, y)$, где $y \in L$. ■

Теорема 74.4. *Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ – линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве. Тогда*

$$\rho(H_1, H_2) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2).$$

Это утверждение следует из того, что для любых векторов $z_1 = x_1 + y_1 \in H_1$ и $z_2 = x_2 + y_2 \in H_2$ выполняются равенства $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| = \rho(x_1 - x_2, y)$, где $y = y_1 - y_2 \in (L_1 + L_2)$. ■

§ 75. Изометрия

Два евклидовых (или два унитарных) пространства V_1 и V_2 называются *изометричными* или *евклидово изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение, т.е. если:

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\forall x, y \in V_1$;
2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, $\forall x \in V_1$, $\forall \alpha \in P$;
3) $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$, $\forall x, y \in V_1$.

Само отображение φ при этом называется *изометрией* или *евклидовым изоморфизмом*.

Из определения следует, что изоморфные евклидовы (унитарные) пространства изоморфны как линейные пространства.

Теорема 75.1. *Два евклидовых (унитарных) пространства изометричны тогда и только тогда, когда равны их размерности.*

Доказательство. Необходимость вытекает из изоморфизма евклидовых (унитарных) пространств как линейных пространств.

Достаточность. Пусть V_1 и V_2 – два евклидовых (два унитарных) пространства и пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Выберем в V_1 и V_2 ортонормированные базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ и построим отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, положив для каждого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V_1$ вектор $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$. Из доказательства теоремы 63.1 следует, что отображение φ – изоморфизм линейных пространств V_1 и V_2. Оно сохраняет скалярное произведение, так как если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то согласно (70.7)

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}, \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}. \quad ■$$

Глава XIV. Линейные операторы

В этой главе рассматриваются отображения (§8), которые действуют в линейных пространствах. Отображения в отличие от матриц будем обозначать рукописными латинскими буквами (например, $\mathcal{A}$), образ вектора x – символом $\mathcal{A}x$.

§ 76. Определение и простейшие свойства

Терминология, примеры. Пусть V и W – линейные пространства над общим полем P. Отображение

$$\mathcal{A} : V \to W \tag{76.1}$$

называется *линейным отображением пространства V в пространство W*, если для любых $x, y \in V$, $\alpha \in P$

1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x$.

Линейное отображение (76.1) называют также *линейным преобразованием пространства V в пространство W* или *линейным оператором, действующим из пространства V в пространство W*.

Если $V = W$, то линейное отображение $\mathcal{A} : V \to V$ называют *линейным отображением (преобразованием) пространства V в себя*, а чаще – *линейным оператором, действующим в V*.

Если $W = P$, то линейное отображение (76.1) называют *линейной формой* или *линейным функционалом в пространстве V*. Линейный функционал обозначают строчными латинскими буквами (например, f), при этом образ вектора x – символом $f(x)$.

Множество всех линейных операторов, действующих из пространства V в пространство W, будем обозначать символом $\mathcal{L}(V, W)$.

В соответствии с определением равенства отображений (§8) операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны, если $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$, $\forall x \in V$.

Примеры. 1. Пусть M_n – пространство вещественных многочленов степени не выше n. Отображение $\mathcal{D} : M_n \to M_n$, определенное правилом

$$\mathcal{D}p(t) = p'(t), \tag{76.2}$$

является линейным и называется *оператором дифференцирования*.

2. Пусть M_∞ – пространство всех вещественных многочленов от одной переменной. Отображение

$$\mathcal{S}p(t) = \int_0^t p(x)\,dx,$$

является линейным и называется *оператором интегрирования*.

3. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Отображение $\mathcal{P} : V \to V$, определенное правилом

$$\mathcal{P}x = x_1 \tag{76.3}$$

для вектора $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, является линейным и называется *оператором проектирования пространства V на L_1 параллельно L_2*.

Отображение $\mathcal{R} : V \to V$, определенное правилом

$$\mathcal{R}x = x_1 - x_2, \tag{76.4}$$

также является линейным и называется *оператором отражения пространства V относительно L_1 параллельно L_2*.

4. Отображение $\mathcal{O} : V \to W$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в нулевой вектор $\theta \in W$, является линейным и называется *нулевым оператором*.

5. Отображение $\mathcal{I} : V \to V$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в x, является линейным и называется *тождественным (единичным) оператором*.

6. Изоморфизм φ линейных пространств V и W, очевидно, является линейным оператором, действующим из V в W.

Простейшие свойства. Из определения вытекают следующие свойства линейных операторов.

1°. *Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор*, так как $\mathcal{A}\theta_1 = \mathcal{A}(0x) = 0\mathcal{A}x = \theta_2$ (здесь θ_1, θ_2 – нулевые векторы пространств V и W соответственно).

2°. *Линейный оператор сохраняет линейные комбинации*, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами: $\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}x_i$.

3°. *Линейный оператор сохраняет линейную зависимость*, т.е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

Задание линейного оператора. Свойство 2° говорит о том, что для задания линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ достаточно определить его только на векторах $e_1, \ldots, e_n$ некоторого базиса пространства V. Зная векторы $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$, можно однозначно найти образ любого вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$: $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A}e_i \in W$. Формализуем это рассуждение.

Теорема 76.1. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, а $g_1, \ldots, g_n$ – произвольные векторы пространства W. Тогда существует, и притом единственный, линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно.*

Доказательство. Построим искомый оператор, положив для каждого вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i. \tag{76.5}$$

Из единственности разложения вектора x по базису следует, что правило (76.5) однозначно определяет образ вектора x, при этом, как легко проверить, $\mathcal{A}e_i = g_i$, $i = \overline{1,n}$. Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат.

Оператор $\mathcal{A}$ единствен, так как если $\mathcal{B}$ – любой другой линейный оператор, переводящий векторы $e_1, \ldots, e_n$ в $g_1, \ldots, g_n$, то

$$\mathcal{B}x = \mathcal{B}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{B}e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i = \mathcal{A}x, \quad \forall x \in V.$$

Следовательно, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. ■

Следствие. Линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны тогда и только тогда, когда они совпадают на векторах базиса V.

§ 77. Матрица линейного оператора

Построение матрицы линейного оператора. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пространств V и W. Как следует из теоремы 76.1, линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. В свою очередь, векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$, однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{m1}f_m, \\ \mathcal{A}e_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{m2}f_m, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{mn}f_m. \end{cases} \tag{77.1}$$

Матрица

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{77.2}$$

называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e и f*. Для обозначения этой матрицы используется также символ $(\mathcal{A})_{fe}$.

Из единственности разложения вектора по базису следует, что при фиксированных базисах e и f матрица линейного оператора определена однозначно.

Теорема 77.1. *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m\times n}$.*

Доказательство. Построим это соответствие. Зафиксируем базисы $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ пространств V и W. Поставим в соответствие каждому линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f. Очевидно, что матрица $A_{fe} \in P^{m\times n}$ определена однозначно. Докажем биективность построенного таким образом отображения. Действительно, оно:

1) сюръективно, так как любая матрица $B = (b_{ij}) \in P^{m\times n}$ является матрицей линейного оператора из $\mathcal{L}(V,W)$, переводящего векторы e_j в векторы $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} f_i$, $j = \overline{1,n}$ (в силу теоремы 76.1 такой оператор существует);

2) инъективно, ибо различные операторы из $\mathcal{L}(V,W)$ не совпадают на базисных векторах и, значит, имеют разные матрицы. ■

Доказанная теорема играет важную роль в теории линейных операторов. Она позволяет описывать свойства линейных операторов через известный нам аппарат теории матриц. В дальнейшем мы увидим, что связь между операторами и матрицами более тесная, чем взаимно однозначное соответствие.

Координаты вектора и его образа. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$, e и f – базисы пространств V и W.

Теорема 77.2. *Если $y = \mathcal{A}x$, то*

$$y_f = A_{fe} x_e . \tag{77.3}$$

Доказательство. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$ и $A_{fe} = (a_{ij})$. Утверждение (77.3) равносильно соотношениям

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \quad i = \overline{1,m} . \tag{77.4}$$

Докажем их. Имеем $y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A} e_j = \big\{$в силу (77.1)$\big\} = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} \big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\big) f_i$. Из единственности разложения вектора y по базису f следует (77.4). ■

Матрицы оператора в различных базисах. Пусть e и $t = eC$ – два базиса пространства V с матрицей перехода C, а f и $s = fD$ – два базиса пространства W с матрицей перехода D. Одному и тому же линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{fe}, а в паре базисов t и s – матрица A_{st}.

Теорема 77.3. *Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ в различных парах базисов связаны соотношением*

$$A_{st} = D^{-1} A_{fe} C . \tag{77.5}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $x \in V$ и его образа $y = \mathcal{A}x$ в силу (77.3) имеем

$$y_f = A_{fe} x_e , \quad y_s = A_{st} x_t . \tag{77.6}$$

В свою очередь, согласно (17.8), $x_e = C x_t$, $y_f = D y_s$. Подставив эти соотношения в (77.6), получим, что $D y_s = A_{fe} C x_t$ или $D A_{st} x_t = A_{fe} C x_t$. Так как это соотношение имеет место для любых x_t, то $D A_{st} = A_{fe} C$. В силу невырожденности матрицы перехода отсюда следует (77.5). ■

Следствие 1. *Матрицы линейного оператора в различных парах базисов эквивалентны* (§16).

Следствие 2. *Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.*

Имеет место более общее утверждение.

Теорема 77.4. *Две матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линейные пространства над полем P размерностей n и m соответственно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $A, B \in P^{m\times n}$ и $B = D^{-1}AC$. Рассмотрим любые линейные пространства V и W над полем P такие, что $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пространстве V произвольный базис e, а в пространстве W – базис f. В силу взаимно однозначного соответствия между $P^{m\times n}$ и $\mathcal{L}(V, W)$ (теорема 77.1) существует единственный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу A. Тогда согласно (77.5) матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = eC$ и $s = fD$.

Достаточность рассмотрена в теореме 77.3. ■

§ 78. Линейное пространство операторов

На множестве $\mathcal{L}(V, W)$ введем операции сложения операторов и умножения оператора на число $\alpha \in P$.

Суммой линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется отображение $\mathcal{C} : V \to W$, выполняемое по правилу $\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$, $\forall x \in V$. Обозначение: $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Итак,

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\,, \quad \forall x \in V\,. \tag{78.1}$$

Произведением линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ *на число* $\alpha \in P$ называется отображение $\mathcal{C} : V \to W$, выполняемое по правилу $\mathcal{C}x = \alpha\mathcal{A}x$, $\forall x \in V$. Обозначение: $\alpha\mathcal{A}$. Итак,

$$(\alpha\mathcal{A})x = \alpha\mathcal{A}x\,, \quad \forall x \in V.$$

Теорема 78.1. *Для любых операторов* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ *и любого числа* $\alpha \in P$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)\,, \quad \alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W).$$

Доказательство. Действительно, для любых $x, y \in V$ согласно (78.1) имеем $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x + y) = \mathcal{A}(x + y) + \mathcal{B}(x + y)$. В силу линейности $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и аксиом линейного пространства $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x + y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) + (\mathcal{B}x + \mathcal{B}y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + (\mathcal{A}y + \mathcal{B}y) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x + (\mathcal{A} + \mathcal{B})y$.

Аналогично показывается, что $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\lambda x) = \lambda((\mathcal{A} + \mathcal{B})x)$ для любых $x \in V$, $\lambda \in P$. Следовательно, $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$.

Точно так же доказывается, что $\alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. ■

Следствие 1. *Сложение операторов и умножение оператора на число являются внутренним и внешним законами композиции на множестве* $\mathcal{L}(V, W)$.

Теорема 78.2. *Множество $\mathcal{L}(V,W)$ – линейное пространство над полем P относительно введенных выше операций.*

Доказательство. Достаточно проверить аксиомы линейного пространства, взяв в качестве нулевого элемента нулевое отображение $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(V,W)$, а в качестве противоположного к оператору $\mathcal{A}$ отображение $-\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$, выполняемое по правилу $(-\mathcal{A})x = -\mathcal{A}x, \forall x \in V$. Все аксиомы вытекают из соответствующих аксиом линейного пространства, примененных к V и W, и проверяются по единой схеме. Проверим, например, ассоциативность. Для любых $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V,W)$ и любого $x \in V$

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C})x = (\mathcal{A}+\mathcal{B})x+\mathcal{C}x = (\mathcal{A}x+\mathcal{B}x)+\mathcal{C}x = \mathcal{A}x+(\mathcal{B}x+\mathcal{C}x),$$
$$(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}))x = \mathcal{A}x+(\mathcal{B}+\mathcal{C})x = \mathcal{A}x+(\mathcal{B}x+\mathcal{C}x).$$

Таким образом, $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$. ■

Теорема 78.3. *Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то линейное пространство $\mathcal{L}(V,W)$ изоморфно пространству матриц $P^{m\times n}$.*

Доказательство. Зафиксируем базисы e и f пространств V и W. Построим отображение $\varphi : \mathcal{L}(V,W) \to P^{m\times n}$, положив $\varphi(\mathcal{A}) = A_{fe}$. Это отображение биективно в силу теоремы 77.1. Покажем, что оно сохраняет законы композиции, т.е. что

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})_{fe} = A_{fe}+B_{fe}, \quad (\alpha\mathcal{A})_{fe} = \alpha A_{fe}. \tag{78.2}$$

Пусть $A_{fe} = (a_{ij})$, $B_{fe} = (b_{ij})$. Тогда, согласно (77.1), $\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i$, $\mathcal{B}e_j = \sum_{i=1}^m b_{ij}f_i$, поэтому $(\mathcal{A}+\mathcal{B})e_j = \mathcal{A}e_j + \mathcal{B}e_j = \sum_{i=1}^m (a_{ij}+b_{ij})f_i$. В силу определения (77.2) матрицы линейного оператора отсюда следует первое из соотношений (78.2).

Аналогично проверяется второе соотношение. ■

Следствие 2. $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

Замечание. Соотношения (78.2) означают, что при сложении операторов их матрицы складываются, при умножении оператора на число его матрица умножается на это же число.

§ 79. Умножение линейных операторов

Тот факт, что линейные операторы образуют линейное пространство, используется редко. Дело в том, что о линейных операторах можно сказать гораздо больше, используя еще одну операцию – умножение операторов, знакомую по §8 как суперпозиция или композиция отображений. Напомним определение.

Пусть V, W, Z – линейные пространства над полем P. *Произведением линейных операторов* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W,Z)$ называется отображение $\mathcal{C} : V \to Z$, выполняемое по правилу $\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$, $\forall x \in V$. Обозначение: $\mathcal{B}\mathcal{A}$. Итак, $(\mathcal{B}\mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$, $\forall x \in V$.

Теорема 79.1. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W,Z)$, то $\mathcal{B}\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,Z)$.*

Доказательство. Линейность оператора $\mathcal{B}\mathcal{A}$ проверяется непосредственно: для любых $x, y \in V$ и $\alpha \in P$

$$(\mathcal{BA})(x+y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x+y)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \\ = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) + \mathcal{B}(\mathcal{A}y) = \mathcal{BA}x + \mathcal{BA}y,$$

$(\mathcal{BA})(\alpha x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha x)) = \mathcal{B}(\alpha(\mathcal{A}x)) = \alpha\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \alpha(\mathcal{BA}x) = (\alpha\mathcal{BA})x$. ■

Произведение линейных операторов определено не для любой пары линейных операторов. Однако если это произведение имеет смысл, то:

$$\begin{array}{l} 1)\ (\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC}) \quad \text{(ассоциативность)}; \\ 2)\ \alpha(\mathcal{AB}) = (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B}); \\ 3)\ (\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}, \\ \quad \mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC} \quad \text{(дистрибутивность)}. \end{array} \tag{79.1}$$

Эти свойства легко проверяются непосредственно.

Умножение линейных операторов не обладает свойством коммутативности. В самом деле, о коммутативности можно говорить лишь для операторов, действующих в одном пространстве, т.е. для операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$. Но и в этом случае умножение не коммутативно. В этом можно убедиться на простом примере операторов дифференцирования $\mathcal{D}$ и интегрирования $\mathcal{S}$ в пространстве M_∞ всех вещественных многочленов от одной переменной.

Теорема 79.2. *При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы пространств V, W, Z, то*

$$(\mathcal{BA})_{ge} = B_{gf}A_{fe}. \tag{79.2}$$

Доказательство. Пусть $A_{fe} = (a_{ij})$, $B_{gf} = (b_{ij})$, $(\mathcal{BA})_{ge} = (c_{ij})$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim Z = k$. Тогда в силу (77.1)

$$\mathcal{BA}e_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij}g_i. \tag{79.3}$$

В то же время $\mathcal{BA}e_j = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_j) = \mathcal{B}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{sj}f_s\right) = \sum_{s=1}^{m} a_{sj}(\mathcal{B}f_s) = \sum_{s=1}^{m} a_{sj}\sum_{i=1}^{k} b_{is}g_i = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} a_{sj}b_{is}g_i = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} b_{is}a_{sj}\right)g_i$.

Сравнение этого разложения с (79.3) приводит к равенству $c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} b_{is}a_{sj}$, которое означает (79.2). ■

§ 80. Образ и ядро линейного оператора

Образом линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется множество

$$\operatorname{im}\mathcal{A} = \{y \in W \mid \exists x \in V : \mathcal{A}x = y\},$$

ядром оператора $\mathcal{A}$ – множество

$$\ker\mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \theta\}.$$

Примеры. 1. В пространстве многочленов M_n для оператора дифференцирования (76.2): $\operatorname{im}\mathcal{D} = M_{n-1}$, $\ker\mathcal{D} = M_0$.

2. Для оператора проектирования (76.3): $\operatorname{im}\mathcal{P} = L_1$, $\ker\mathcal{P} = L_2$.

3. Для оператора отражения (76.4): $\operatorname{im}\mathcal{R} = V$, $\ker\mathcal{R} = \{\theta\}$.

Теорема 80.1. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, то $\ker\mathcal{A}$ – линейное подпространство пространства V, $\operatorname{im}\mathcal{A}$ – линейное подпространство пространства W.*

Эти утверждения вытекают из теоремы 18.1, условия которой легко проверяются. ■

Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а *дефектом* – размерность ядра. Обозначения: $\operatorname{rg}\mathcal{A}$, $\operatorname{def}\mathcal{A}$. Итак, $\operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim\operatorname{im}\mathcal{A}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \dim\ker\mathcal{A}$.

Теорема 80.2. *Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, то*

$$\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n). \tag{80.1}$$

Доказательство. Достаточно показать, что для множеств (80.1) имеет место двустороннее вложение: с одной стороны, если $y \in \operatorname{im}\mathcal{A}$, то $y = \mathcal{A}x$ для некоторого вектора $x \in V$, т.е. $y = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}e_i \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)$; с другой стороны, если $y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)$, то $y = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}e_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \mathcal{A}x$, где $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, т.е. $y \in \operatorname{im}\mathcal{A}$. ■

Теорема 80.3. *Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Доказательство. Из теоремы 80.2 и равенства (64.3) следует, что $\operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim\operatorname{im}\mathcal{A} = \dim\mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)$. Ранг системы векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ совпадает с рангом системы арифметических векторов, составленных из координат этих векторов в базисе f пространства W, т.е. с рангом системы столбцов матрицы A_{fe}. ■

Теорема 80.4 (о ранге и дефекте). *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, то*

$$\operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{def}\mathcal{A} = \dim V. \tag{80.2}$$

Доказательство. Пусть $\ker\mathcal{A} \neq \{\theta\}$ и $e_1, \ldots, e_k$ – базис $\ker\mathcal{A}$. Дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пространства V. Согласно теореме 80.2, $\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_k, \mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n)$. Докажем, что векторы $\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих векторов имеют место соотношения $\alpha_{k+1}\mathcal{A}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n\mathcal{A}e_n = \theta$ или $\mathcal{A}(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = \theta$. Следовательно, $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \ker\mathcal{A}$. Это означает, что вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, \ldots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$. Таким образом, $\dim\operatorname{im}\mathcal{A} = n - k$, $\dim\ker\mathcal{A} = k$. Отсюда следует (80.2).

Пусть $\ker\mathcal{A} = \{\theta\}$. В этом случае можно применить то же самое доказательство, с той лишь разницей, что теперь $e_1, \ldots, e_n$ – произвольный базис пространства V. ■

Теорема 80.5. *Множество всех прообразов вектора* $y \in \operatorname{im} \mathcal{A}$ *является линейным многообразием с направляющим подпространством* $\ker \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть x_0 – один из прообразов вектора y, $K = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = y\}$ – множество всех прообразов y, $H = x_0 + \ker \mathcal{A}$. Тогда $K = H$, так как для этих множеств имеет место двустороннее вложение:

$$\forall x \in K \Rightarrow x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + l, \quad \text{где } l = x - x_0 \in \ker \mathcal{A};$$

$$\forall x \in H \Rightarrow x = x_0 + l, \quad l \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}x = y. \qquad \blacksquare$$

Замечание. Теорема 80.5, сформулированная на матричном языке, совпадает с теоремой 30.3 о множестве решений неоднородной системы уравнений.

Теорема 80.6. *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\operatorname{rg} \mathcal{A} = r$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда существуют базисы* e *и* f *пространств* V *и* W, *в которых оператор* $\mathcal{A}$ *имеет матрицу* $I_r \in P^{m \times n}$ *вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right] \Bigg\}{\scriptstyle r},$$

в которой все элементы равны нулю, кроме первых r *диагональных элементов, равных* 1.

Доказательство. Возьмем произвольные базисы t и s пространств V и W. Пусть A_{st} – матрица оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов t и s. Тогда, согласно теореме 80.3, $\operatorname{rg} \mathcal{A}_{st} = r$. В силу теоремы 16.10 отсюда следует, что матрицы A_{st} и I_r эквивалентны. Следовательно (теорема 77.4), они являются матрицами одного линейного оператора. Отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

Базисы e и f, в которых оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу I_r, называют *канонической парой базисов.*

Теоремой 80.6 решается вопрос о наиболее простой форме матрицы линейного оператора, действующего в различных пространствах V и W. Очевидно, этот вопрос далеко не праздный, так как одному и тому же линейному оператору соответствует целый класс эквивалентных друг другу матриц и выбор самой простой из них упрощает исследование свойств оператора.

Остановимся более подробно на одном из частных случаев линейных операторов – случае, когда пространство W совпадает с основным полем P.

§ 81. Линейные формы

Определение и свойства. Как уже отмечалось в §76, линейное отображение $f : V \to P$ линейного пространства V над полем P в это поле называется *линейной формой* (или *линейным функционалом*) *в пространстве* V.

Примеры. 1. Простейшей линейной формой в пространстве V является отображение $f : V \to P$, определенное равенством $f(x) = 0$, где $0 \in P$.

2. Линейной формой является отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенное следующим правилом: если $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $f(x) = x_1$.

3. В пространстве M_n вещественных многочленов степени не выше n линейной формой является отображение $f : M_n \to \mathbb{R}$, определенное правилом: если $p(t) \in M_n$, то $f(p) = p(1)$.

Из общей теории линейных операторов следует, что если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, то линейная форма $f \in \mathcal{L}(V, P)$ однозначно определяется числами

$$\alpha_1 = f(e_1), \ldots, \alpha_n = f(e_n).$$

При этом для произвольного вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ в силу линейности f имеем

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n . \tag{81.1}$$

Представление (81.1) называется *общим видом линейной формы f в базисе $e_1, \ldots, e_n$*. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются *коэффициентами линейной формы f в базисе $e_1, \ldots, e_n$*.

Линейные формы и гиперплоскость. Теорема 80.5, относящаяся к линейному оператору общего вида, справедлива и для линейных форм. В терминах линейной формы она означает, что если $f(x_0) = c$, то множество $K = \{x \in V | f(x) = c\}$ является линейным многообразием $H = x_0 + L$, где $L = \{x \in V | f(x) = 0\}$. Если f – ненулевая форма, то $\operatorname{rg} f = 1$ и согласно (80.2) $\dim L = \dim \ker f = n - 1$. Следовательно, K – гиперплоскость. Этот же факт в координатной форме (81.1) означает, что все решения одного уравнения с n неизвестными

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = c$$

образуют гиперплоскость, так что все решения системы линейных алгебраических уравнений можно трактовать как пересечение гиперплоскостей (сравните с теоремой 67.2).

Сопряженное пространство. Известно (теорема 78.2), что множество $\mathcal{L}(V, P)$ всех линейных форм в линейном пространстве V образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число, введенных в §78 правилами

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) .$$

Линейное пространство всех линейных форм на пространстве V называется *сопряженным пространством к пространству V*. Оно обозначается символом V^*.

Теорема 81.1. *Справедливо равенство* $\dim V^* = \dim V$.

Это равенство вытекает из теоремы 78.3 и ее следствия, так как $\dim P = 1$. ■

Следствие. Всякое конечномерное линейное пространство изоморфно своему сопряженному. Это вытекает из теоремы 63.1 об изоморфизме линейных пространств одинаковой размерности.

Специальное представление линейной формы в евклидовом (унитарном) пространстве.

Теорема 81.2. *Для любой линейной формы f в евклидовом (унитарном) пространстве V существует, и притом единственный, вектор $h \in V$ такой, что*

$$f(x) = (x, h), \quad \forall x \in V.$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис V и $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ – коэффициенты линейной формы f в этом базисе. Тогда вектор $h = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i$ будет искомым в силу (81.1) и (70.7). Единственность вектора h следует из того, что если вектор h_1 удовлетворяет требованиям теоремы, то $(x, h_1) = (x, h)$, $\forall x \in V$, т.е. $(x, h_1 - h) = 0$, $\forall x \in V$. Так как $h_1 - h \in V$, то отсюда следует, что $h_1 - h = \theta$. ■

§ 82. Алгебра линейных операторов, действующих в одном пространстве

Обратимся теперь к линейным операторам, действующим в одном пространстве. Основной целью наших исследований будет поиск матрицы такого оператора, имеющей наиболее простую форму. Однако об этом речь пойдет позже. В ближайших параграфах будут рассматриваться общие вопросы, относящиеся к операторам, действующим в одном пространстве.

Пусть V – линейное пространство над полем P. Рассмотрим множество $\mathcal{L}(V, V)$ всех линейных операторов, действующих в пространстве V. В этом множестве для любых операторов выполнимы не только сложение и умножение на число, но и умножение операторов друг на друга. Из общей теории линейных операторов вытекают следующие факты.

1°. $\mathcal{L}(V, V)$ – *линейное пространство над полем* P (теорема 78.2).

2°. $\mathcal{L}(V, V)$ – *некоммутативное кольцо с единицей* (см. (79.1)).

3°. Линейное пространство над полем P, которое является кольцом и удовлетворяет условию 2 из (79.1), называется *алгеброй* (или *линейной алгеброй*) *над полем* P. Размерность линейного пространства при этом называется также *размерностью алгебры*. Из свойства 1° и (79.1) следует, что $\mathcal{L}(V, V)$ – *алгебра над полем* P.

Отметим, что множество $P^{n \times n}$ квадратных матриц n-го порядка над полем P также является алгеброй. Примером бесконечномерной алгебры служит кольцо многочленов $P[x]$.

Может быть построена другая алгебра, в которой нарушена как коммутативность, так и ассоциативность произведения. Примером такой алгебры является множество всех векторов геометрического пространства V_3 относительно линейных операций над векторами и векторного произведения (§23).

4°. При построении матрицы линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ используется один базис e пространства V: столбцами этой матрицы

являются коэффициенты разложений векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ по базису $e_1, \ldots, e_n$ (§77); матрица обозначается символом A_e или $(\mathcal{A})_e$ и называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе e*. Очевидно, $A_e \in P^{n\times n}$.

5°. *Линейное пространство $\mathcal{L}(V,V)$ изоморфно пространству $P^{n\times n}$* и $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$ (теорема 78.3 и ее следствие).

6°. Как и в любом кольце, оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ можно возводить в степень $n \in \mathbb{N}$, и если $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – произвольный многочлен над полем P от переменной t, то однозначно определен оператор

$$p(\mathcal{A}) = a_0 I + a_1 \mathcal{A} + \ldots + a_n \mathcal{A}^n , \tag{82.1}$$

называемый *многочленом от оператора $\mathcal{A}$*. Из свойств матрицы линейного оператора следует, что матрицей многочлена (82.1) от оператора $\mathcal{A}$ является тот же многочлен от матрицы A_e: $(p(\mathcal{A}))_e = p(A_e)$.

7°. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется согласно (77.5) по следующему закону:

$$A_f = Q^{-1} A_e Q . \tag{82.2}$$

Из (82.2) и (58.6) следует, что *одному и тому же линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ соответствует целый класс матриц, подобных друг другу*.

8°. Очевидно, что *две матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве над полем P* (теорема 77.4).

9°. Из (82.2) следует, что *все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковый определитель*. Это означает, что определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса и определяется самим оператором. *Определителем линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$* называется определитель матрицы этого оператора в произвольном базисе. Обозначение: $\det \mathcal{A}$. Итак,

$$\det \mathcal{A} = \det A_e . \tag{82.3}$$

Заметим, что кольцо $\mathcal{L}(V,V)$ не является полем хотя бы потому, что оно некоммутативно. К тому же вопрос об обратимости линейных операторов пока остается открытым.

§ 83. Обратный оператор

Напомним определение обратного отображения и некоторые факты (§8) применительно к линейному оператору, действующему в одном пространстве.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$. Отображение $\mathcal{A}^{-1} : V \to V$ называется *обратным оператором* к оператору $\mathcal{A}$, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I} . \tag{83.1}$$

Теорема 83.1. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ обратим тогда и только тогда, когда он биективен.*

Теорема 83.2. *Обратный оператор единствен.*

Исследуем теперь свойства обратимости, относящиеся непосредственно к линейным операторам.

Теорема 83.3. *Обратный оператор линеен.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$. Покажем, что обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$, если он существует, является линейным оператором, действующим в пространстве V. Действительно, если $\mathcal{A}$ обратим, то он биективен и, значит, сюръективен. Это означает, что для любых векторов $y_1, y_2 \in V$ существуют $x_1, x_2 \in V$ такие, что $y_1 = \mathcal{A}x_1$, $y_2 = \mathcal{A}x_2$. При этом $x_1 = \mathcal{A}^{-1}y_1$, $x_2 = \mathcal{A}^{-1}y_2$. Отсюда получим, что $\mathcal{A}^{-1}(y_1+y_2) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x_1+\mathcal{A}x_2) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x_1+x_2) = x_1+x_2 = \mathcal{A}^{-1}y_1 + \mathcal{A}^{-1}y_2$. Аналогично, $\mathcal{A}^{-1}(\alpha y_1) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha\mathcal{A}x_1) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha\mathcal{A}^{-1}y_1$, $\forall\alpha \in P$. ■

Теорема 83.4. *Оператор обратим тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном базисе обратима.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, e – произвольный базис пространства V. Обратимость оператора $\mathcal{A}$ означает существование оператора $\mathcal{A}^{-1}$, удовлетворяющего (83.1). Перейдя в равенстве (83.1) к матрицам операторов в базисе e, получим

$$A_e(\mathcal{A}^{-1})_e = (\mathcal{A}^{-1})_e A_e = I.$$

Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для матрицы A_e. ■

Замечание 1. Попутно показано, что

$$(\mathcal{A}^{-1})_e = A_e^{-1}. \tag{83.2}$$

Оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т.е.

$$\ker\mathcal{A} = \{\theta\}, \tag{83.3}$$

и *вырожденным* в противном случае.

Теорема 83.5. *В конечномерном пространстве V следующие утверждения равносильны: для $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$*

1) $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$;
2) $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$;
3) $\mathcal{A}$ *не вырожден*;
4) $\operatorname{im}\mathcal{A} = V$;
5) $\det\mathcal{A} \neq 0$;
6) $\mathcal{A}$ *обратим*;
7) $\mathcal{A}$ *биективен*. (83.4)

Доказательство. 1 $\iff$ 2 $\iff$ 5 $\iff$ 6 $\iff$ 7. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – произвольный базис пространства V. В силу свойства (79.2) утверждение 1 равносильно матричному равенству

$A_e(\mathcal{A}^{-1})_e = I$ или, с учетом теоремы 5.3, соотношениям $A_e(A_e)^{-1} = (A_e)^{-1}A_e = I$, эквивалентным (в силу (79.2)) равенствам (83.1) и (в силу теоремы 5.2) условию

$$\det A_e \neq 0. \tag{83.5}$$

Это доказывает импликации $1 \iff 5$, $1 \iff 2$, $1 \iff 6$ и, согласно теореме 83.1, $1 \iff 7$.

$1 \iff 3 \iff 4$. Утверждение 1 в силу (83.5) равносильно равенству

$$\operatorname{rg}\mathcal{A} = n, \tag{83.6}$$

которое согласно (80.2) эквивалентно тому, что

$$\operatorname{def}\mathcal{A} = 0. \tag{83.7}$$

Равенство (83.6) означает, что $\dim \operatorname{im}\mathcal{A} = \dim V$ или, в силу теоремы 64.3 о монотонности размерности, что $\operatorname{im}\mathcal{A} = V$. Это доказывает импликацию $1 \iff 4$. Равенство (83.7) означает, что $\dim \ker \mathcal{A} = 0$. Это доказывает импликацию $1 \iff 3$. ■

Замечание 2. Теорема 83.5 не верна в бесконечномерном пространстве. Так, в пространстве M_∞ всех вещественных многочленов от одной переменной для операторов дифференцирования $\mathcal{D}$ и интегрирования $\mathcal{S}$ имеем

1. $\mathcal{D}\mathcal{S} = \mathcal{I}$, но $\mathcal{S}\mathcal{D} \neq \mathcal{I}$;

2. $\ker \mathcal{S} = \{\theta\}$, однако $\operatorname{im}\mathcal{S} = \{p(t) | \, p(0) = 0\}$ *и не совпадает со всем пространством* M_∞.

Теорема 83.6. *Произведение обратимых операторов обратимо, при этом*

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

Это утверждение уже было доказано в §8 применительно к отображениям общего вида. ■

Следствие 1. *Умножение линейных операторов является алгебраической операцией на множестве всех обратимых операторов, действующих в пространстве* V.

Следствие 2. *Множество всех обратимых линейных операторов из* $\mathcal{L}(V, V)$ *образует неабелеву мультипликативную группу.*

Глава XV. Структура линейного оператора в комплексном пространстве

Приступим к вопросу о поиске в классе подобных матриц, соответствующих линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, матрицы наиболее простого вида. Ответ на этот вопрос совсем прост, когда линейный оператор действует в пространствах V и W, никак не связанных между собой (теорема 80.5). Гораздо интереснее (и сложнее), когда $V = W$. В первом случае базисы пространств V и W можно было выбирать независимо друг от друга, во втором – необходимо строить базис одного пространства $V = W$. Мы увидим, к какому разнообразию ответов приводит эта меньшая свобода выбора.

Наиболее полные результаты этой главы относятся к случаю, когда V – комплексное пространство.

§ 84. Инвариантные подпространства

Пусть V – линейное пространство над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пространства V называется *инвариантным подпространством относительно оператора* $\mathcal{A}$, если для любого вектора x из L его образ $\mathcal{A}x$ также лежит в L.

Примеры. 1. Тривиальные подпространства $\{\theta\}$ и V инвариантны относительно любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$.

2. Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантными подпространствами будут $\ker \mathcal{A}$ и $\operatorname{im} \mathcal{A}$, так как если $\mathcal{A}x = \theta$, то $\mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}\theta = \theta$, и если $y = \mathcal{A}x$, то $\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}x_1$, где $x_1 = \mathcal{A}x$.

3. Для оператора дифференцирования (76.2) в пространстве M_n вещественных многочленов инвариантными подпространствами являются все подпространства $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Для линейного оператора наличие инвариантных подпространств означает возможность построить базис, в котором его матрица имеет несколько более простую форму, чем матрица общего вида.

Теорема 84.1. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и L – нетривиальное инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$. Тогда существует базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазитреугольную форму.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис подпространства L. Дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пространства V. Построим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Из инвариантности L вытекает, что $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_k \in L$ и, следовательно, векторы $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_k$

линейно выражаются только через $e_1, \ldots, e_k$. Таким образом,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{A}e_1 & = & a_{11}e_1 + \ldots + a_{k1}e_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \mathcal{A}e_k & = & a_{1k}e_1 + \ldots + a_{kk}e_k, \\ \mathcal{A}e_{k+1} & = & a_{1,k+1}e_1 + \ldots + a_{k,k+1}e_k + \ldots + a_{n,k+1}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \mathcal{A}e_n & = & a_{1n}e_1 + \ldots + a_{kn}e_k + \ldots + a_{nn}e_n. \end{array}\right. \tag{84.1}$$

Это означает, что матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и, следовательно, имеет квазитреугольную форму:

$$A_e = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline O & C \end{array}\right]. \blacksquare \tag{84.2}$$

Замечание 1. Верна и теорема, обратная доказанной: переход от (84.2) к (84.1) очевиден и приводит к тому, что $L = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Теорема 84.2. *Если пространство V является прямой суммой нетривиальных подпространств $L_1, \ldots, L_k$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пространстве V существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 84.1. В качестве искомого базиса берется базис e, составленный из базисов слагаемых подпространств (теорема 66.1). Тогда в силу инвариантности подпространств $L_1, \ldots, L_k$ матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & O \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{A_k} \end{bmatrix}. \blacksquare \tag{84.3}$$

Замечание 2. Верна и теорема, обратная доказанной.

Индуцированный оператор. Рассматривая линейный оператор только на его инвариантном подпространстве, можно получить новый оператор. Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A}|L : L \to L$, определенное

равенством

$$(\mathcal{A}|L)x = \mathcal{A}x\,, \quad \forall x \in L,$$

называется *индуцированным оператором, порожденным оператором* $\mathcal{A}$ или *сужением* оператора $\mathcal{A}$ на подпространство L. В силу линейности оператора $\mathcal{A}$ индуцированный оператор также является линейным. Он совпадает с оператором $\mathcal{A}$ на подпространстве L и не определен вне его. Итак, $\mathcal{A}|L \in \mathcal{L}(L, L)$.

Замечание 3. Из разложений (84.1) следует, что матрицы A_1, $\ldots, A_k$ в (84.3) являются матрицами индуцированных операторов $\mathcal{A}|L_1, \ldots, \mathcal{A}|L_k$ в базисах инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_k$.

§ 85. Собственные значения и собственные векторы

Пусть V – линейное пространство над полем P. Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если существует такое число $\lambda \in P$, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x\,. \tag{85.1}$$

Число λ называется *собственным значением оператора* $\mathcal{A}$, *соответствующим собственному вектору* x. Множество всех собственных значений оператора $\mathcal{A}$ называется *спектром* этого оператора.

Примеры. 1. В пространстве вещественных многочленов M_n любой многочлен нулевой степени является собственным вектором оператора дифференцирования (76.2), ему соответствует собственное значение $\lambda = 0$.

2. Для оператора проектирования (76.3) любой ненулевой вектор из L_1 будет собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$, так как $\mathcal{P}x = x$, $\forall x \in L_1$, а любой ненулевой вектор из L_2 будет собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 0$, так как $\mathcal{P}x = 0x$, $\forall x \in L_2$.

Из определения следует, что если x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ, то любой вектор αx, где $\alpha \neq 0$, также является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим тому же собственному значению λ. Это означает, что любой собственный вектор порождает целое одномерное подпространство собственных векторов, из которого исключен вектор θ. Таким образом, в отношении собственных векторов понятие "различные" не имеет содержательного смысла, существеннее ставить вопрос об их линейной независимости.

Теорема 85.1. *Собственные векторы* $x_1, \ldots, x_k$ *оператора, отвечающие различным собственным значениям* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Доказательство. Применим индукцию по k. Для $k = 1$ утверждение заведомо верно, так как собственный вектор является ненулевым по определению. Пусть оно верно для любой системы из $k - 1$

векторов. Докажем его для k векторов $x_1, \ldots, x_k$. Приравняем нулевому вектору линейную комбинацию этих векторов:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \theta . \tag{85.2}$$

Под действием оператора $\mathcal{A}$ это равенство перейдет в равенство

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k = \theta . \tag{85.3}$$

Умножая обе части (85.2) на λ_k и вычитая полученное равенство из (85.3), получаем, что $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = \theta$. В силу индуктивного предположения отсюда следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$. Тогда (85.2) перейдет в равенство $\alpha_k x_k = \theta$. Так как $x_k \neq \theta$, то $\alpha_k = 0$. Итак, в (85.2) все коэффициенты равны нулю. Следовательно, $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы. ■

Следствие. Линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений.

Не всякий линейный оператор обладает собственными векторами. Например, в геометрической плоскости V_2 оператор поворота на угол φ, не кратный π, не имеет ни одного собственного вектора, так как ни один ненулевой вектор после такого поворота не останется коллинеарным самому себе. Выясним вопрос о существовании собственных векторов.

§ 86. Характеристический многочлен

Определение, основные свойства. Это понятие уже встречалось в §58 в связи с матрицами второго и третьего порядков. Остановимся теперь на нем более подробно.

Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n\times n}$ называется функция

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad \lambda \in P . \tag{86.1}$$

Теорема 86.1. *Характеристический многочлен* (86.1) *матрицы* $A \in P^{n\times n}$ *является многочленом n-й степени от переменной λ над полем P.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in P^{n\times n}$. Тогда

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} .$$

Каждый элемент матрицы $A - \lambda I$ представляет собой многочлен от λ степени не выше 1, значит, каждый член $\det(A - \lambda I)$ является многочленом от λ степени не выше n. Отсюда следует, что $f(\lambda)$ – многочлен от λ, степень которого не превосходит n. Осталось показать, что степень этого многочлена в точности равна n. Действительно, все члены $\det(A - \lambda I)$, отличные от $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$, имеют степень, не превосходящую $n - 2$, следовательно, в многочлене $f(\lambda)$ слагаемые, содержащие λ^{n-1} и λ^n, определяются только членом

$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$, который согласно формулам Виета имеет вид

$$(-\lambda)^n+(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+g_{n-2}(\lambda),$$

где $g_{n-2}(\lambda)$ – многочлен от λ степени не выше $n-2$. Таким образом,

$$f(\lambda)=a_0+a_1(-\lambda)+a_2(-\lambda)^2+\dots+a_{n-1}(-\lambda)^{n-1}+(-\lambda)^n \qquad (86.2)$$

является многочленом n-й степени от λ над полем P. ■

Замечание 1. Попутно найден коэффициент a_{n-1} характеристического многочлена (86.2): $a_{n-1}=a_{11}+\dots+a_{nn}$. Кроме того, $a_0=f(0)=\det A$.

Более того, нетрудно показать (используя свойства определителя), что a_{n-k} равен сумме главных миноров k-го порядка матрицы A. Итак, в (86.2):

$$\begin{aligned}&a_0=\det A,\quad a_{n-1}=\operatorname{tr}A,\\ &a_{n-k}\text{ – сумма главных миноров }k\text{-го порядка матрицы }A.\end{aligned} \qquad (86.3)$$

Теорема 86.2. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Доказательство теоремы и сама теорема приводятся в §58 (теорема 58.1). ■

Следствие. Все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковые характеристические многочлены.

Таким образом, характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от базиса, а определяется самим оператором.

Характеристическим многочленом оператора называется функция

$$f(\lambda)=\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}),\quad \lambda\in P.$$

Из (82.3) следует, что характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в произвольном базисе.

Из следствия и второго равенства (86.3) вытекает, что след матрицы A_e линейного оператора $\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса e. Поэтому (как и в §82, п.9) можно ввести понятие *следа оператора* равенством $\operatorname{tr}\mathcal{A}=\operatorname{tr}A_e$.

Теорема 86.3. *Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора.*

Это утверждение следует из (84.2) и замечания 3 из §84. ■

Теорема 86.4. *Если $V=L_1\oplus\dots\oplus L_k$ – прямая сумма подпространств $L_1,\dots,L_k$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V,V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda),\dots,f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $\mathcal{A}|L_1,\dots,\mathcal{A}|L_k$:*

$$f(\lambda)=f_1(\lambda)\dots f_k(\lambda). \qquad (86.4)$$

Утверждение является следствием теоремы 84.2. ■

Условие существования собственных векторов линейного оператора определяется его характеристическим многочленом.

Теорема 86.5. *Пусть V – линейное пространство над полем P. Число $\lambda \in P$ является собственным значением оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ тогда и только тогда, когда λ – корень его характеристического многочлена.*

Доказательство. Согласно определению число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существует вектор x, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} \mathcal{A}x = \lambda x, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in P, \end{cases} \iff \begin{cases} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = \theta, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in P. \end{cases}$$

Это равносильно вырожденности оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ при некотором $\lambda \in P$ или, в силу (83.4), условию

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0 \tag{86.5}$$

при некотором $\lambda \in P$. Таким образом, число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$, принадлежащим полю P. ■

Уравнение (86.5) называется *характеристическим уравнением* для оператора $\mathcal{A}$.

Корни характеристического многочлена называются *характеристическими числами* оператора. Согласно теореме 86.5 собственными значениями оператора являются характеристические числа из основного поля, и только они.

Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве. Итак, вопрос о существовании собственных векторов сводится к вопросу о существовании корней характеристического многочлена, принадлежащих основному полю. Известно, что не во всяком поле многочлены имеют корни. Однако, как показано в §49, в алгебраически замкнутом поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Отсюда в соответствии с теоремой 86.5 вытекают следующие утверждения.

Теорема 86.6. *Произвольный линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, имеет:*

1) n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;

2) хотя бы один собственный вектор;

3) на любом своем инвариантном подпространстве хотя бы один собственный вектор.

Последнее утверждение следует из того, что индуцированный оператор, как и любой оператор, действующий в комплексном пространстве, имеет собственный вектор, который, очевидно, является собственным вектором основного оператора.

Замечание 2. Теорема 86.6 остается справедливой в вещественном пространстве для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

Способ нахождения собственных векторов. Этот способ определен теоремой 86.5 и состоит в следующем.

1. Строится характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ и находятся его корни. Те корни, которые принадлежат полю P, будут собственными значениями оператора.

2. Для каждого найденного собственного значения λ_0 находятся ненулевые векторы ядра оператора $\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I}$. Они и будут собственными векторами, отвечающими λ_0. Если $e_1,\dots,e_n$ – базис пространства V, то поиск собственных векторов сводится к решению однородной системы уравнений $(A_e-\lambda_0 I)x_e=0$, фундаментальная система решений которой дает полный набор линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_0, в координатах относительно базиса e.

Замечание 3. Прием, описанный здесь, представляет собой лишь теоретическую основу решения проблемы собственных значений и собственных векторов. Для реальных вычислений он нуждается в специальных приемах, так как поиск корней многочлена в общем случае (исключая разве что многочлены второй степени) сопряжен с дополнительными трудностями. Уже для многочленов степени $n\geq 5$ задача нахождения корней неразрешима в радикалах (доказано Э.Галуа в 30-х гг. прошлого столетия). Этот результат оказал решающее влияние на развитие вычислительных методов решения проблемы собственных значений. Их изложение не входит в нашу задачу, однако отметим, что вычислительные алгоритмы поиска собственных значений, как правило, не связаны с многочленами.

В ручных вычислениях иногда удается найти собственные значения, минуя прямое построение характеристического многочлена, если вычислять определитель матрицы $A-\lambda I$ *методом выделения линейных множителей*. Этот метод основан на выполнении элементарных преобразований, формирующих в какой-либо строке (столбце) матрицы $A-\lambda I$ общий множитель вида $\lambda-a$, который затем выносится за знак определителя. Это дает корень $\lambda=a$ характеристического многочлена.

§ 87. Собственное подпространство

Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Множество

$$W_{\lambda_0}=\{x\in V\mid \mathcal{A}x=\lambda_0 x\} \tag{87.1}$$

называется *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_0.

Очевидно, что $W_{\lambda_0} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I})$, поэтому собственное подпространство является линейным подпространством пространства V. Из (87.1) следует, что собственное подпространство W_{λ_0} состоит из нулевого вектора θ и всех собственных векторов, отвечающих λ_0. Легко проверить, что собственное подпространство инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется *геометрической кратностью собственного значения* λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена – его *алгебраической кратностью*.

Теорема 87.1. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Пусть m и s – алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения λ_0 оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$.

Собственное подпространство W_{λ_0} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, следовательно, можно рассматривать индуцированный оператор $\mathcal{A}|W_{\lambda_0}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть $e_1, \ldots, e_s$ – базис W_{λ_0}. Тогда согласно (87.1) матрицей оператора $\mathcal{A}|W_{\lambda_0}$ в этом базисе будет диагональная матрица s-го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали. Следовательно, $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. Согласно теореме 86.3, $(\lambda_0 - \lambda)^s$ является делителем характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$, но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \le m$. ■

Теорема 87.2. *Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ – попарно различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Тогда для собственных подпространств $W_{\lambda_1}, \ldots, W_{\lambda_p}$ выполнено условие прямой суммы (теорема 66.1): любая система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого W_{λ_k}, линейно независима как система собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям (теорема 85.1). ■

§ 88. Операторы простой структуры

Критерии простой структуры. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *оператором простой структуры*, если в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 88.1. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу.*

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Согласно определению оператор $\mathcal{A}$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда он имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$. Это

равносильно существованию базиса $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{88.1}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения, соответствующие собственным векторам $e_1, \ldots, e_n$. ■

Следствие. В n-мерном пространстве линейный оператор, имеющий n различных собственных значений, является оператором простой структуры.

Обратное утверждение не верно. Тождественный оператор имеет простую структуру, однако все его собственные значения равны 1.

В соответствии с (88.1) оператор простой структуры называют также *диагонализуемым оператором.*

Теорема 88.2. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда все его собственные подпространства в прямой сумме дают все пространство V:*

$$W_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus W_{\lambda_p} = V. \tag{88.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{A}$ имеет простую структуру. Тогда в пространстве V существует базис $e_1, \ldots, e_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Рассмотрим подпространство $W_{\lambda_1} + \ldots + W_{\lambda_p}$. Очевидно, оно содержится в V. С другой стороны, каждый вектор базиса $e_1, \ldots, e_n$ принадлежит одному из собственных подпространств, поэтому $V \subset \sum_{i=1}^{p} W_{\lambda_i}$. Следовательно, $W_{\lambda_1} + \ldots + W_{\lambda_p} = V$. Но эта сумма является прямой в силу теоремы 87.2.

Достаточность вытекает из критерия прямой суммы (теорема 66.1): совокупность базисов собственных подпространств W_{λ_k}, $k = \overline{1, p}$, образует базис V, тем самым пространство V имеет базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. ■

Замечание 1. На основании теоремы 66.1 условие (88.2) может быть заменено равносильным условием

$$\dim W_{\lambda_1} + \ldots + \dim W_{\lambda_p} = \dim V. \tag{88.3}$$

Теорема 88.3. *Линейный оператор, действующий в комплексном пространстве, имеет простую структуру тогда и только тогда, когда для каждого собственного значения этого оператора геометрическая кратность совпадает с алгебраической.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, – все различные собственные значения оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и пусть m_k и s_k, $k = \overline{1,p}$, – алгебраические и геометрические кратности λ_k. Так как V – комплексное пространство, то, согласно теореме 86.6, $\dim V = m_1 + \ldots + m_p$. С другой стороны, $0 < \dim W_{\lambda_k} = s_k \leq m_k$, $k = \overline{1,p}$, поэтому равенство (88.3) возможно тогда и только тогда, когда

$$s_k = m_k\,, \quad k = \overline{1,p}. \qquad \blacksquare \tag{88.4}$$

Замечание 2. Теорема 88.3 в вещественном пространстве верна для тех операторов, характеристические многочлены которых имеют только вещественные корни.

Матричная формулировка операторных свойств. Точно так же, как и для линейных операторов $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, определяются собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы $A \in P^{n\times n}$. Ненулевой вектор-столбец $x \in P^n$ называется *собственным вектором матрицы* $A \in P^{n\times n}$, если существует число $\lambda \in P$ такое, что

$$Ax = \lambda x\,.$$

При этом число λ называется *собственным значением матрицы* A, соответствующим собственному вектору x.

Если $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – произвольный базис пространства V, то для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ имеет место импликация

$$\mathcal{A}x = \lambda x \iff A_e x_e = \lambda x_e\,. \tag{88.5}$$

Это означает, что собственные значения оператора $\mathcal{A}$ и его матрицы в любом базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ совпадают, а собственные векторы матрицы A_e являются координатными столбцами собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Характеристические многочлены оператора и его матрицы совпадают по определению, поэтому для квадратных матриц $A \in P^{n\times n}$ имеют место теоремы 86.5 и 86.6.

Эта идентичность свойств оператора и его матрицы, замеченная уже в связи с первыми свойствами оператора (§77), продолжает наблюдаться.

Квадратная матрица $A \in P^{n\times n}$ называется *матрицей простой структуры*, если она имеет n линейно независимых собственных векторов.

Из (88.5) следует, что линейный оператор является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда его матрица в любом базисе имеет простую структуру.

Теорема 88.4 (матричная формулировка теоремы 88.1). *Квадратная матрица является матрицей простой структуры тогда и только тогда, когда она подобна диагональной.*

Доказательство. Пусть $A \in P^{n\times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим произвольное линейное пространство V над полем P размерности n. Зафиксируем в пространстве V произвольный базис f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ – линейный оператор, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A, так что $A = A_f$ (согласно теореме 77.1 такой оператор существует). Матрица $A = A_f$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ – оператор простой структуры. В силу теоремы 88.1 это равносильно существованию базиса e, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу (88.1). Таким образом, матрица A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда она и диагональная матрица (88.1) являются матрицами одного оператора. Это равносильно их подобию (§82). ■

Замечание 3. Доказательство теоремы можно схематически изобразить в виде лаконичной диаграммы, которой мы неоднократно будем пользоваться:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V) & & \\ & \overset{f}{\nearrow} & & \overset{e}{\searrow} & \\ A = A_f & & \cong & & A_e = \left[\cdot_i \cdot_k\right] \end{array} \qquad (88.6)$$

Замечание 4. Теорема может быть доказана и на матричном языке. Действительно, матрица A является матрицей простой структуры тогда и только тогда, когда она имеет n линейно независимых собственных векторов $s_1, \dots, s_n \in P^n$. Это равносильно следующей цепочке равенств: если $S = [s_1 \dots s_n]$ – матрица, столбцами которой являются собственные векторы $s_1, \dots, s_n$, а Λ – диагональная матрица с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на главной диагонали, то

$$\left\{\begin{array}{l} As_1 = \lambda_1 s_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ As_n = \lambda_n s_n \end{array}\right. \iff A[s_1 \dots s_n] = [s_1 \dots s_n]\Lambda \iff AS = S\Lambda \iff$$

$$\iff A = S\Lambda S^{-1}.$$

Жорданова клетка. Итак, самой простой формой матрицы обладают только операторы простой структуры, т.е. операторы, имеющие полный набор линейно независимых собственных векторов. Как мы уже отмечали, в вещественном пространстве существуют операторы, которые не имеют ни одного собственного вектора. И в комплексном пространстве не каждый линейный оператор обладает необходимым для базиса числом линейно независимых собственных векторов. Рассмотрим важный пример.

Матрица

$$J_k(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \tag{88.7}$$

называется *жордановой клеткой k-го порядка*. Эта матрица имеет:

1) характеристический многочлен $f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k$;

2) собственное значение $\lambda = \lambda_0$ алгебраической кратности k;

3) собственные векторы, являющиеся нетривиальными решениями однородной системы уравнений с матрицей

$$B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ранг которой, очевидно, равен $k-1$. Таким образом, матрица $J_k(\lambda_0)$ (или оператор, задаваемый этой матрицей) имеет (теорема 30.2) один линейно независимый собственный вектор $(k-(k-1)=1)$ и не может быть матрицей простой структуры.

§ 89. Треугольная форма матрицы линейного оператора

Теорема 89.1. *В n-мерном комплексном пространстве V для любого линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ существует система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_n$ всех размерностей от 1 до n, т.е. таких, что*

$$L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V, \tag{89.1}$$

где $\dim L_k = k, \quad k = \overline{1,n}$.

Доказательство. Используем индукцию по n. Для $n=1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных пространств размерности $n-1$. Докажем ее для n-мерного пространства V, воспользовавшись следующей леммой.

Лемма. *Линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, обладает инвариантным подпространством размерности $n-1$.*

Доказательство леммы. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пространстве V, имеет собственное значение λ (теорема 86.6). Значит, $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) = 0$ и $\operatorname{rg}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) \le n-1$. Следовательно, $\dim \operatorname{im}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) \le n-1$ и в пространстве V существует подпространство L размерности $n-1$, которое содержит $\operatorname{im}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})$. Очевидно,

L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$. Покажем, что оно инвариантно и относительно $\mathcal{A}$. Пусть $x \in L$, тогда $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})x = y \in L$. Отсюда следует, что $\mathcal{A}x = \lambda x + y \in L$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Согласно лемме оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном комплексном пространстве V, имеет инвариантное подпространство L_{n-1} размерности $n-1$. Тогда индуцированный оператор $\mathcal{A}|L_{n-1}$ действует в $(n-1)$-мерном комплексном пространстве L_{n-1} и согласно индуктивному предположению для него существует система вложенных инвариантных подпространств $L_1 \subset \ldots \subset L_{n-1}$ таких, что $\dim L_k = k$, $k = \overline{1, n-1}$. Так как действия операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}|L_{n-1}$ совпадают, то подпространства $L_1, \ldots, L_{n-1}$ инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$. Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$. ■

Теорема 89.2. *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму.*

Доказательство. Согласно теореме 89.1 для оператора $\mathcal{A}$ найдется система инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_n$ таких, что $\dim L_k = k$ и $L_1 \subset \ldots \subset L_{n-1} \subset L_n = V$. Искомый базис $e_1, \ldots, e_n$ строим так: в качестве e_1 берем любой базис L_1, в качестве e_k, где $k > 1$, – вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k. В силу инвариантности подпространств L_k, $k = \overline{1, n}$, матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму. ■

Замечание 1. Перенумерацией построенного базиса в обратном порядке можно получить нижнюю треугольную форму матрицы линейного оператора.

Замечание 2. На главной диагонали матрицы A_e расположены собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 89.3. *Любая квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей треугольную форму.*

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 88.4 и ведется по схеме (88.6). ■

§ 90. Нильпотентный оператор

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *нильпотентным*, если существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{A}^q = \mathcal{O}$. Наименьшее число q, обладающее этим свойством, называется *индексом нильпотентности (высотой)* оператора $\mathcal{A}$. Очевидно, что индекс нильпотентности ненулевого оператора удовлетворяет неравенству $q \geq 2$. Аналогично определяется нильпотентная матрица $A \in P^{n\times n}$ и ее индекс.

Примеры. 1. В пространстве вещественных многочленов M_n оператор дифференцирования (76.3) является нильпотентным оператором индекса $n+1$.

2. Жорданова клетка

$$J_k(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

является нильпотентной матрицей индекса k.

Теорема 90.1. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ – нильпотентный оператор индекса q и $x_0 \in V$ – вектор, для которого $\mathcal{A}^{q-1}x_0 \neq \theta$, то векторы*

$$x_0, \mathcal{A}x_0, \dots, \mathcal{A}^{q-1}x_0 \tag{90.1}$$

линейно независимы.

Доказательство. Рассмотрим равенство $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 \mathcal{A}x_0 + \dots + \alpha_{q-1}\mathcal{A}^{q-1}x_0 = \theta$. Применяя последовательно операторы $\mathcal{A}^{q-1}$, $\mathcal{A}^{q-2}$, $\dots$, $\mathcal{A}$ к обеим частям этого равенства, получим, что $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$. Это доказывает линейную независимость системы векторов (90.1). ■

Следствие 1. Индекс нильпотентности не превосходит размерности пространства.

Теорема 90.2. *В комплексном пространстве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.*

Доказательство. Необходимость. Если λ – собственное значение нильпотентного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ индекса q и x – соответствующий собственный вектор, то, как нетрудно проверить, имеет место цепочка импликаций

$$\mathcal{A}x = \lambda x \;\Rightarrow\; \mathcal{A}^2x = \lambda^2 x \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; \mathcal{A}^q x = \lambda^q x.$$

Отсюда следует, что $\lambda^q x = \theta$. Так как $x \neq \theta$, то $\lambda = 0$.

Достаточность. Рассмотрим базис e комплексного пространства V, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет верхнюю треугольную матрицу (§89), главная диагональ которой состоит целиком из нулей (§89, замечание 2). Итак,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Как нетрудно проверить, при последовательном возведении этой матрицы в степени $q = 2, 3, \dots, n$ нетривиальный треугольник, расположенный над главной диагональю, перемещается каждый раз на одну диагональ выше, так что $(A_e)^n = O$. Значит, $\mathcal{A}^n = \mathcal{O}$. ■

Замечание. Необходимость этого утверждения, как видно из самого доказательства, имеет место и в вещественном пространстве.

Прямая сумма операторов. Если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_p$ – прямая сумма подпространств $L_1, L_2, \dots, L_p$, инвариантных относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, то оператор $\mathcal{A}$ называет-

ся *прямой суммой индуцированных операторов* $\mathcal{A}|L_1, \ldots, \mathcal{A}|L_p$. Этот термин мотивирован тем обстоятельством, что для любого вектора $x \in V$ с разложением $x = x_1 + \ldots + x_p$, где $x_k \in L_k$, $k = \overline{1,p}$, имеет место равенство $\mathcal{A}x = \mathcal{A}x_1 + \ldots + \mathcal{A}x_p = (\mathcal{A}|L_1)x_1 + \ldots + (\mathcal{A}|L_p)x_p$.

Теорема 90.3. *Вырожденный и не нильпотентный линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо показать, что существует единственная пара подпространств L_1, L_2, инвариантных относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ и таких, что $V = L_1 \oplus L_2$, $\mathcal{A}|L_1$ нильпотентен, $\mathcal{A}|L_2$ обратим.

Существование. Обозначим для $k \in \mathbb{N}$

$$N_k = \ker \mathcal{A}^k, \quad T_k = \operatorname{im} \mathcal{A}^k.$$

1. Покажем, что *подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q, начиная с которого все N_k совпадают*, т.е.

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = N_{q+1} = \ldots \tag{90.2}$$

а) Вложение $N_k \subseteq N_{k+1}$ очевидно, так как если $\mathcal{A}^k x = \theta$, то $\mathcal{A}^{k+1}x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k) = \mathcal{A}\theta = \theta$.

б) Пусть $N_k = N_{k+1}$, тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, так как $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. Второе из этих вложений следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $\mathcal{A}^{k+2}x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^{k+1}(\mathcal{A}x) = \theta$. Значит, $\mathcal{A}x \in N_{k+1} = N_k$, откуда $\mathcal{A}^k(\mathcal{A}x) = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^{k+1}x = \theta$.

Из "а" и "б" следует, что подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1}, либо совпадает со всеми последующими ядрами. Так как в конечномерном пространстве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать, то наступит момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q.

2. Зафиксируем этот момент q и покажем, что

$$V = N_q \oplus T_q.$$

Действительно, $\dim V = \dim N_q + \dim T_q$ в силу теоремы 80.4 о ранге и дефекте, при этом $N_q \cap T_q = \{\theta\}$, так как если $y \in N_q$, $y \in T_q$, то $\mathcal{A}^q y = \theta$, $y = \mathcal{A}^q x$, т.е. $\mathcal{A}^{2q}x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $\mathcal{A}^q x = \theta$, откуда следует, что $y = \theta$.

3. Подпространства N_q, T_q *инвариантны относительно* $\mathcal{A}$, ибо:

а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q$, поэтому $\mathcal{A}^{q+1}x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^q(\mathcal{A}x) = \theta$, следовательно, $\mathcal{A}x \in N_q$;

б) если $y \in T_q$, то $y = \mathcal{A}^q x$ и $\mathcal{A}y = \mathcal{A}^{q+1}x = \mathcal{A}^q(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^q x_1$, где $x_1 = \mathcal{A}x$, следовательно, $\mathcal{A}y \in T_q$.

4. Оператор $\mathcal{A}|N_q$ – *нильпотентный оператор индекса* q, так как:

а) $\mathcal{A}^q x = \theta$ для любого вектора $x \in N_q$;

б) существует вектор $x_0 \in N_q$ такой, что $\mathcal{A}^{q-1}x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$.

5. Оператор $\mathcal{A}|T_q$ *обратим*, так как его ядро состоит только из нулевого вектора. Действительно, если $y \in \ker \mathcal{A}|T_q$, то $y \in T_q$, $\mathcal{A}y = \theta$,

т.е. $y = \mathcal{A}^q x$ и $\mathcal{A}^{q+1} x = \theta$. Отсюда следует, что $x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $\mathcal{A}^q x = \theta$ и $y = \theta$.

Утверждения пп. 2 – 5 доказывают существование искомого разложения: $L_1 = N_q$, $L_2 = T_q$.

Единственность. Пусть существует другое разложение $V = N \oplus T$, обладающее всеми свойствами первого.

1. Нильпотентность оператора $\mathcal{A}|N$ означает, что $\mathcal{A}^k x = \theta$, $\forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и

$$\dim N \leq \dim N_q . \tag{90.3}$$

2. Обратимость оператора $\mathcal{A}|T$ означает, что $\operatorname{im} \mathcal{A}|T = T$. Следовательно, для любого вектора $y \in T$ имеет место представление $y = \mathcal{A}y_1$, где $y_1 \in T$. Используя такое же представление для вектора y_1 и всех последующих, получаем, что $y = \mathcal{A}y_1 = \mathcal{A}^2 y_2 = \ldots = \mathcal{A}^q y_q$. Таким образом, $T \subseteq T_q$ и

$$\dim T \leq \dim T_q . \tag{90.4}$$

Так как $\dim N + \dim T = \dim V = \dim N_q + \dim T_q$, то из (90.3), (90.4) следует, что $N = N_q$, $T = T_q$. ■

Следствие 2. *Оператор $\mathcal{A}$ на подпространстве N_q имеет только нулевые собственные значения, а на подпространстве T_q не имеет нулевых собственных значений.* Это вытекает из доказанной теоремы с учетом теоремы 90.2 и того, что обратимый оператор не вырожден.

Следствие 3. *Для оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве V, с характеристическим многочленом* $f(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = (-\lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$:

а) характеристические многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ операторов $\mathcal{A}|N_q$ и $\mathcal{A}|T_q$ имеют вид

$$f_1(\lambda) = (-\lambda)^{m_1}, \quad f_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}; \tag{90.5}$$

б) при этом

$$\dim N_q = m_1, \quad \dim T_q = m_2 + \ldots + m_p . \tag{90.6}$$

Соотношение (90.5) вытекает из (86.4), если учесть, что $f_2(0) \neq 0$. Соотношение (90.6) следует из (90.5), так как размерность пространства совпадает со степенью характеристического многочлена.

§ 91. Корневые подпространства

Теоремой 90.3 осуществляется одновременное расщепление пространства $V = N_q \oplus T_q$, характеристического многочлена $f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)$ и самого оператора $\mathcal{A}$ на индуцированные операторы $\mathcal{A}|N_q$ и $\mathcal{A}|T_q$. Такое расщепление направлено на выделение во всем пространстве V максимального подпространства N_q, на

котором оператор $\mathcal{A}$ имеет только нулевые собственные значения. Этот же прием может быть использован и для других собственных значений.

Корневые векторы. Пусть λ_j – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Вектор $x \in V$ называется *корневым вектором* оператора $\mathcal{A}$, *отвечающим собственному значению* λ_j, если $(\mathcal{A}-\lambda_j I)^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. *Высотой* корневого вектора называется наименьшее k, обладающее указанным свойством. Очевидно, высота нулевого корневого вектора (и только нулевого) равна нулю.

Отметим простейшие свойства корневых векторов, вытекающие из определения.

1. *Корневые векторы высоты* 1 *являются собственными векторами*, так как удовлетворяют условиям $(\mathcal{A}-\lambda_j I)x = \theta$, $x \neq \theta$.

2. *Если* x *– корневой вектор высоты* $k > 0$, *то вектор* $(\mathcal{A}-\lambda_j I)x$ *является корневым вектором высоты* $k-1$.

3. *Корневые векторы различных высот линейно независимы.* Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 90.1.

Отсюда следует, что если x – *корневой вектор высоты* $k > 0$, *то векторы*

$$x, (\mathcal{A}-\lambda_j I)x, \ldots, (\mathcal{A}-\lambda_j I)^{k-1}x$$

линейно независимы; следовательно, *высота корневого вектора не превосходит размерности пространства.*

Корневые векторы высоты $k > 1$ называются *присоединенными векторами* $(k-1)$*-го порядка*. Итак, если x – присоединенный вектор $(k-1)$-го порядка, то $(\mathcal{A}-\lambda_j I)^k x = \theta$, $(\mathcal{A}-\lambda_j I)^{k-1}x \neq \theta$ или, другими словами, $(\mathcal{A}-\lambda_j I)^{k-1}x$ – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ_j. Таким образом, корневой вектор – это либо нулевой вектор, либо собственный вектор, либо присоединенный вектор.

Корневые подпространства. Множество всех корневых векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению λ_j, называется *корневым подпространством оператора* $\mathcal{A}$, *отвечающим собственному значению* λ_j. Обозначение: K_{λ_j}. Итак,

$$K_{\lambda_j} = \{x \in V \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0 : (\mathcal{A}-\lambda_j I)^k x = \theta\}. \tag{91.1}$$

Опишем структуру корневого подпространства K_{λ_j}.

1. *Сдвиг оператора* $\mathcal{A}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{B} = \mathcal{A}-\lambda_j I$ или, как часто говорят, выполним сдвиг оператора $\mathcal{A}$ на $\lambda_j I$.

Лемма 1. *Собственные значения операторов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *связаны соотношением*

$$\lambda_{\mathcal{B}} = \lambda_{\mathcal{A}} - \lambda_j. \tag{91.2}$$

Это утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 2. *Если* $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_j - \lambda)^{m_j} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$ – *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{A}$, *то*

$$\tilde{f}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda_j - \lambda)^{m_1} \dots (-\lambda)^{m_j} \dots (\lambda_p - \lambda_j - \lambda)^{m_p} \tag{91.3}$$

– *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{B}$.

Это утверждение вытекает из леммы 1.

Лемма 3. *Если подпространство* L *инвариантно относительно оператора* $\mathcal{B}$, *то оно инвариантно относительно оператора* $\mathcal{A}$.

В самом деле, если $x \in L$, то $\mathcal{B}x \in L$, т.е. $y = (\mathcal{A} - \lambda_j I)x \in L$. Следовательно, $\mathcal{A}x = y + \lambda_j x \in L$.

2. *Разложение оператора* $\mathcal{B}$ *в прямую сумму нильпотентного и обратимого операторов.* Из (91.3) следует, что $\mathcal{B}$ – вырожденный (так как имеет нулевое собственное значение), но не нильпотентный (так как имеет ненулевое собственное значение). Следовательно, к оператору $\mathcal{B}$ применима теорема 90.3 о прямой сумме нильпотентного и обратимого операторов. Согласно этой теореме, если $N_k = \ker \mathcal{B}^k$, $T_k = \operatorname{im} \mathcal{B}^k$, то

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots \tag{91.4}$$

$V = N_q \oplus T_q$, где N_q и T_q инвариантны относительно $\mathcal{B}$, оператор $\mathcal{B}\big|_{N_q}$ нильпотентен, а оператор $\mathcal{B}\big|_{T_q}$ обратим.

3. *Структура корневого подпространства.* Вернемся к оператору $\mathcal{A}$. Из цепочки вложений (91.4) следует, что

а) N_1 состоит из корневых векторов оператора $\mathcal{A}$ высоты, не превосходящей 1, т.е. совпадет с собственным подпространством W_{λ_j}, отвечающим собственному значению λ_j. Таким образом,

$$N_1 = W_{\lambda_j} \tag{91.5}$$

и, следовательно,

$$\dim N_1 = s_j, \tag{91.6}$$

где s_j – геометрическая кратность собственного значения λ_j;

б) N_2 состоит из корневых векторов оператора $\mathcal{A}$ высоты, не превосходящей 2, а N_q состоит из корневых векторов всех высот, т.е. q – максимальная высота корневого вектора, отвечающего собственному значению λ_j, и N_q совпадает со всем корневым подпространством K_{λ_j}. Таким образом,

$$K_{\lambda_j} = N_q \tag{91.7}$$

и цепочка вложений (91.4) может быть выстроена следующим образом:

$$W_{\lambda_j} = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = K_{\lambda_j}. \tag{91.8}$$

Из свойств подпространства N_q вытекают важные свойства корневых подпространств: если характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_j-\lambda)^{m_j}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}, \quad \lambda_i \neq \lambda_k \text{ при } i \neq k, \tag{91.9}$$

то

а) подпространство K_{λ_j} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$ (в силу инвариантности относительно $\mathcal{B}$ и леммы 3);

б) характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}\big|_{K_{\lambda_j}}$ имеет вид

$$f_j(\lambda) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j} \tag{91.10}$$

(это следует из (90.5) и леммы 2);

в)
$$\dim K_{\lambda_j} = m_j, \tag{91.11}$$

(это следует из (90.6)).

Замечание 1. Из (91.8) следует, что максимальная высота q корневых векторов, отвечающих собственному значению λ_j, совпадает с индексом нильпотентности оператора $\mathcal{A} - \lambda_j I$ и согласно свойству 3 не превосходит размерности K_{λ_j}, т.е. алгебраической кратности собственного значения λ_j.

Из (91.8) следует также, что собственное подпространство W_{λ_j} является подпространством корневого подпространства K_{λ_j}, так что $s_j \leq m_j$. При этом

$$W_{\lambda_j} = K_{\lambda_j} \Leftrightarrow s_j = m_j. \tag{91.12}$$

Таким образом, цепочка (91.8) дает еще одно доказательство теорем 87.1 и 88.3.

Теорема 91.1 (о расщеплении линейного оператора). *Если $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V и*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}\dots(\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \quad \lambda_i \neq \lambda_k \quad (i \neq k)$$

– его характеристический многочлен, то пространство V разлагается в прямую сумму его корневых подпространств:

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}. \tag{91.13}$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по p. Для $p = 1$, очевидно, $V = K_{\lambda_1}$. Пусть теорема верна для оператора, имеющего $p-1$ различных собственных значений. Докажем ее для оператора $\mathcal{A}$. Выделим корневое подпространство K_{λ_p} так, как это было сделано в пп. 2 и 3 настоящего параграфа. В соответствии с теоремой 90.3 и соотношением (91.7) имеем

$$V = K_{\lambda_p} \oplus T_q.$$

Обозначим $V_1 = T_q$. Из теоремы 90.3 следует, что подпространство V_1 инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}-\lambda_p I$, а, следовательно, оно инвариантно и относительно $\mathcal{A}$ (лемма 3), при этом (в силу (90.6)) характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}\big|_{V_1}$ имеет вид

$$f_2(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_{p-1} - \lambda)^{m_{p-1}}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j).$$

Оператор $\mathcal{A}_1$ имеет $p-1$ различных собственных значений, и для него теорема верна. Если учесть, что корневые подпространства оператора $\mathcal{A}_1$ совпадают с корневыми подпространствами $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_{p-1}}$ оператора $\mathcal{A}$, то $V_1 = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}}$ и $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}} \oplus \oplus K_{\lambda_p}$. ■

Следствие 1. *Ненулевые корневые вектора оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Следствие 2. *Для любого линейного оператора, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму* (согласно теореме 84.2), *у которой число диагональных клеток совпадает с числом различных собственных значений, а их размеры – с алгебраическими кратностями собственных значений,* или, в матричной формулировке, *любая квадратная комплексная матрица подобна квазидиагональной матрице, обладающей указанным выше свойством.*

Замечание 2. Разложение (91.13), обладающее всеми свойствами из теоремы 91.1, для каждого оператора единственно в силу теоремы 90.3.

§ 92. Жорданова форма

Перейдем к построению базиса, в котором матрица линейного оператора имеет наиболее простую форму. Этим базисом будет совокупность построенных специальным образом базисов корневых подпространств.

Канонический базис корневого подпространства. Пусть K_{λ_j} – корневое подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее собственному значению λ_j. Положим

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}, \quad N_k = \ker \mathcal{B}^k, \quad n_k = \dim N_k, \quad r_k = \operatorname{rg} \mathcal{B}^k.$$

Построим сначала само корневое подпространство K_{λ_j}. Для этого согласно (91.8) необходимо найти момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с $N_q = K_{\lambda_j}$; при этом в силу (91.6), (91.11) имеем $n_1 = s_j < n_2 < \dots < n_q = m_j$, где s_j и m_j – геометрическая и алгебраическая кратности λ_j.

Теперь будем строить базис K_{λ_j}, последовательно просматривая подпространства $N_q, N_{q-1}, \dots, N_1$.

N_q) Пусть $f_1, \dots, f_{t_q}$ – векторы, дополняющие произвольный базис N_{q-1} до базиса N_q. Ясно, что:

1) они будут корневыми векторами высоты q;

2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$;

3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_q - n_{q-1}$, так как $n_{q+1} = n_q$;

4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не принадлежит N_{q-1} (такие векторы будем называть *линейно независимыми над* N_{q-1}).

N_{q-1}) Построим векторы $\mathcal{B}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_{t_q}$. Эти векторы являются корневыми векторами высоты $q-1$, и они линейно независимы над N_{q-2}, так как в противном случае для нетривиального набора чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_q}$ будем иметь $\mathcal{B}^{q-2}\sum_{k=1}^{t_q}\alpha_k\mathcal{B}f_k = \theta$, т.е. $\mathcal{B}^{q-1}\sum_{k=1}^{t_q}\alpha_k f_k = \theta$, и $\sum_{k=1}^{t_q}\alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_{t_q}$ над N_{q-1}.

Дополним эти векторы векторами $g_1, \ldots, g_{t_{q-1}} \in N_{q-1}$ так, чтобы векторы $\mathcal{B}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_{t_q}, g_1, \ldots, g_{t_{q-1}}$ дополняли произвольный базис N_{q-2} до базиса N_{q-1}. Ясно, что:

1) они будут корневыми векторами высоты $q-1$;

2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;

3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$;

4) они линейно независимы над N_{q-2}.

N_{q-2}) Аналогично строятся векторы

$$\mathcal{B}^2 f_1, \ldots, \mathcal{B}^2 f_{t_q}, \mathcal{B}g_1, \ldots, \mathcal{B}g_{t_{q-1}}, h_1, \ldots, h_{t_{q-2}},$$

дополняющие произвольный базис N_{q-3} до базиса N_{q-2}. Для этой системы векторов справедливы те же факты 1–4, что и для векторов, построенных на предыдущих шагах .

Выполняя далее такие же построения в подпространствах N_{q-3}, $N_{q-4}, \ldots$, придем к подпространству N_1.

N_1) Здесь строятся векторы

$$\mathcal{B}^{q-1}f_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-1}f_{t_q}, \mathcal{B}^{q-2}g_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-2}g_{t_{q-1}}, \ldots, \mathcal{B}v_1, \ldots, \mathcal{B}v_{t_2},$$

которые дополняются векторами $u_1, \ldots, u_{t_1}$ до базиса N_1. Таким образом, векторы

$$\mathcal{B}^{q-1}f_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-1}f_{t_q}, \mathcal{B}^{q-2}g_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-2}g_{t_{q-1}}, \ldots, \mathcal{B}v_1, \ldots, \mathcal{B}v_{t_2}, u_1, \ldots, u_{t_1}$$

1) являются собственными векторами;

2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ (очевидно, $n_0 = \operatorname{def}\mathcal{B}^0 = 0$);

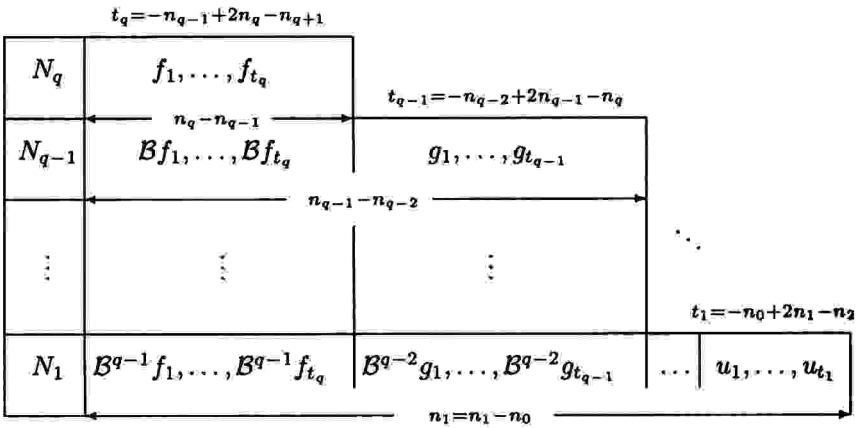
3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$;

4) они линейно независимы.

Полученную за q шагов систему векторов удобно объединить в таблицу, которую будем называть *жордановой лестницей* (см. с. 275).

Теорема 92.1. *Построенная система векторов образует базис корневого подпространства* K_{λ_j}.

Доказательство. Количество векторов в построенной системе равно размерности пространства K_{λ_j}, так как $n_1 + (n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + \ldots + (n_q - n_{q-1}) = n_q = \dim K_{\lambda_j}$. Эти векторы линейно независимы, так как если приравнять их линейную комбинацию нулевому вектору и последовательно применить операторы $\mathcal{B}^{q-1}, \mathcal{B}^{q-2}, \ldots, \mathcal{B}$ к обеим частям полученного равенства, то все коэффициенты линейной комбинации окажутся равными нулю. ■



Нумерация базиса. Будем нумеровать векторы построенного базиса по столбцам жордановой лестницы: внутри каждого столбца снизу вверх, а сами столбцы в произвольном порядке. Полученный таким образом базис называется *каноническим* (или *жордановым*) *базисом корневого подпространства* K_{λ_j}.

Матрица оператора $\mathcal{A}|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе. 1. Пусть $e_1,\dots,e_q$ – векторы первого столбца жордановой лестницы. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} e_1=\mathcal{B}^{q-1}f_1,\\ e_2=\mathcal{B}^{q-2}f_1,\\ \dots\\ e_q=f_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathcal{B}e_1=\theta,\\ \mathcal{B}e_2=e_1,\\ \dots\\ \mathcal{B}e_q=e_{q-1} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})e_1=\theta,\\ (\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})e_2=e_1,\\ \dots\\ (\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})e_q=e_{q-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}e_1=\lambda_j e_1,\\ \mathcal{A}e_2=\lambda_j e_2+e_1,\\ \dots\\ \mathcal{A}e_q=\lambda_j e_q+e_{q-1}. \end{array}\right. \qquad (92.1)$$

Этой группе векторов канонического базиса соответствуют первые q столбцов матрицы $\mathcal{A}|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе, которые согласно (92.1) имеют вид

$$\begin{bmatrix} \boxed{J_q(\lambda_j)} \\ O \end{bmatrix}, \qquad (92.2)$$

где $J_q(\lambda_j)$ – клетка Жордана (88.7) q-го порядка с λ_j на главной диагонали.

Точно так же устроены столбцы матрицы $\mathcal{A}|K_{\lambda_j}$, определяемые векторами второго столбца жордановой лестницы: диагональная клетка имеет тот же вид $J_q(\lambda_j)$, а все остальные элементы равны нулю. Таким образом, первая группа из t_q столбцов жордановой лестницы порождает клетки Жордана q-го порядка с λ_j на главной диагонали. Число этих клеток равно t_q.

2. Следующая группа из t_{q-1} столбцов жордановой лестницы определяет клетки $J_{q-1}(\lambda_j)$ на главной диагонали матрицы $\mathcal{A}|K_{\lambda_j}$. Число клеток $(q-1)$-го порядка равно t_{q-1}.

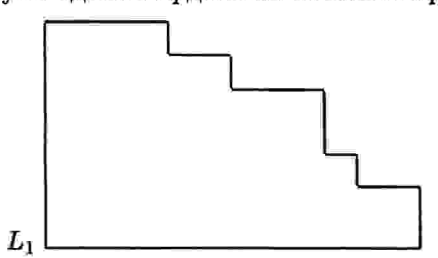
3. Рассмотрев все столбцы жордановой лестницы, получим матрицу A_j оператора $\mathcal{A}|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе. Из (92.2) и последующих рассуждений вытекает, что A_j – квазидиагональная матрица с клетками Жордана $J_k(\lambda_j)$ на главной диагонали. Всего этих клеток столько, сколько столбцов в жордановой лестнице, т.е. n_1 или, согласно (91.6), s_j (геометрическая кратность λ_j). Таким образом,

$$A_j = \begin{bmatrix} \boxed{J_{q_1}(\lambda_j)} & & & O \\ & \boxed{J_{q_2}(\lambda_j)} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{J_{q_{s_j}}(\lambda_j)} \end{bmatrix}, \qquad (92.3)$$

где $q_1 + \ldots + q_{s_j} = \dim K_{\lambda_j} = m_j$, а число клеток k-го порядка равно числу $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$.

Процесс построения канонического базиса, использованный нами, однозначно определяет форму матрицы A_j с точностью до порядка клеток, так как количество всех клеток равно геометрической кратности s_j собственного значения λ_j, а количество клеток k-го порядка равно числу $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$, или, согласно (80.2), $t_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$.

Пусть теперь оператор $\mathcal{A}\big|_{K_{\lambda_j}}$ имеет квазидиагональную матрицу с клетками Жордана на главной диагонали в некотором другом базисе. Перенумеруем базис так, чтобы клетки Жордана располагались в порядке убывания размеров. Базисные векторы с новой нумерацией расположим в виде лестницы, столбцы которой (в нумерации снизу вверх) соответствуют одной жордановой клетке матрицы:



Рассмотрим эту лестницу по строкам снизу вверх. Пусть L_1 – линейная оболочка векторов нижней строки. Очевидно, L_1 – линейная оболочка собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, причем любой собственный вектор является их линейной комбинацией. Следовательно, $L_1 = W_{\lambda_j} = N_1$.

Аналогично, если L_2 – линейная оболочка векторов двух нижних строк лестницы, то L_2 – линейная оболочка корневых векторов высоты $k \leq 2$, причем любой корневой вектор высоты $k \leq 2$ является их линейной комбинацией. Следовательно, $L_2 = N_2$ и т.д. Таким образом, эта лестница с точностью до порядка столбцов совпадает с жордановой лестницей и, значит, форма матрицы A_j не зависит от способа построения базиса.

Таким образом, структура клеток Жордана в матрице A_j определяется только оператором $\mathcal{A}$. Порядок клеток определен порядком нумерации столбцов жордановой лестницы.

Жорданов базис и жорданова нормальная форма матрицы оператора. *Жордановой матрицей* (или *матрицей, имеющей жорданову нормальную форму*) называется квазидиагональная матрица с клетками Жордана на главной диагонали.

Жордановым базисом для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет жорданову нормальную форму.

Канонический базис корневого подпространства K_{λ_j} является жордановым базисом для оператора $\mathcal{A}\big|_{K_{\lambda_j}}$, а матрица A_j – его жордановой матрицей. Тем самым решен вопрос о жордановом базисе и жордановой форме матрицы для оператора, имеющего одно корневое подпространство, в частности, для нильпотентного оператора.

Решим эту задачу в общем случае. Будем придерживаться прежних обозначений: m_j и s_j – алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения λ_j, $r_k = \operatorname{rg}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$.

Теорема 92.2. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V, и его характеристический многочлен имеет вид*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \quad \text{где} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j.$$

Тогда в пространстве V существует базис e, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \\ O & & \boxed{A_p} \end{bmatrix}, \tag{92.4}$$

где матрицы A_j, $j = \overline{1,p}$, имеют вид (92.3).

Доказательство. В соответствии с теоремой 91.1, $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$. В качестве искомого базиса e возьмем совокупность канонических базисов корневых подпространств $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$. Согласно теореме 84.2 матрица A_e имеет вид (92.4), где A_j – матрица оператора $\mathcal{A}|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе K_{λ_j}. Следовательно, матрица A_j имеет вид (92.3). ■

Таким образом, матрица (92.4) с учетом (92.3) является жордановой матрицей для оператора $\mathcal{A}$, а совокупность канонических базисов

корневых подпространств K_{λ_j} – жордановым базисом для этого оператора.

Замечание 1. *Жорданова форма матрицы линейного оператора определена однозначно с точностью до порядка клеток Жордана.*

Докажем это. Пусть в некотором жордановом базисе оператор имеет жорданову матрицу $\tilde{J}$. Любой диагональный элемент матрицы $\tilde{J}$ является одним из собственных значений λ_j. Рассмотрим часть жорданова базиса, соответствующую всем жордановым клеткам с λ_j. Пусть L_j – линейная оболочка этих векторов. Так как $(J_k(\lambda_j)-\lambda_j I)^k = 0$, то $L_j \subset K_{\lambda_j}$ и $\dim L_j \leq \dim K_{\lambda_j}$. Кроме того, согласно теореме 84.2 (обратная часть) $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_j \oplus \ldots \oplus L_p$. Поскольку $V = K_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda_j} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda_p}$, то $\dim L_j = \dim K_{\lambda_j}$ и $L_j = K_{\lambda_j}$. Таким образом, размер клеток A_j и их количество не зависят от выбора жорданова базиса. Что же касается самих клеток A_j, то их форма, как показано выше, не зависит от способа построения жорданова базиса корневого подпространства K_{λ_j}. Порядок клеток определен порядком нумерации корневых подпространств и тем порядком, в котором нумеруются столбцы жордановой лестницы в каноническом базисе K_{λ_j}.

Замечание 2. *Для операторов простой структуры, и только для них, жорданова форма совпадает с диагональной*, так как критерий (88.4) с учетом (91.12) равносилен условию

$$W_{\lambda_j} = K_{\lambda_j}, \quad j = \overline{1,p}. \tag{92.5}$$

Приведение матрицы к жордановой форме. В матричной формулировке теорема 92.2 означает, что *любая квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму.* Это может быть доказано по известной схеме (88.6).

Жорданова матрица, подобная матрице A, называется *жордановой нормальной формой матрицы* A.

Теорема 92.3. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают.*

Это утверждение следует из того, что квадратные матрицы одинакового порядка над общим полем подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора (§82, п. 8°). ■

Привести матрицу A к жордановой нормальной форме – значит найти невырожденную матрицу X и жорданову матрицу J такие, что

$$X^{-1}AX = J. \tag{92.6}$$

Эта задача представляет собой матричную формулировку задачи нахождения жорданова базиса и жордановой формы матрицы линейного оператора: если матрицу A рассматривать как матрицу некоторого оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе e, то равенство (92.6) говорит

(ср. с (82.2)) о том, что X – матрица перехода от базиса e к жордановому, т.е. столбцами матрицы X являются координатные столбцы векторов жорданова базиса в базисе e.

Теорема 92.4 (теорема Гамильтона–Кэли). *Линейный оператор, действующий в комплексном (или в вещественном) пространстве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Доказательство. 1. Докажем сначала это утверждение для комплексного пространства V. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ и его характеристический многочлен имеет вид (91.3). Согласно теореме 91.1, $V = K_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda_p}$ и, следовательно, для любого вектора $x \in V$ имеет место разложение $x = x_1 + \ldots + x_p$, где $x_j \in K_{\lambda_j}$, $j = \overline{1,p}$. Тогда

$$f(\mathcal{A})x = f(\mathcal{A})x_1 + \ldots + f(\mathcal{A})x_j + \ldots + f(\mathcal{A})x_p\,. \qquad (92.7)$$

Каждое слагаемое в этом разложении равно нулевому вектору, так как $f(\mathcal{A})x_j = (\lambda_1\mathcal{I}-\mathcal{A})^{m_1}\ldots(\lambda_j\mathcal{I}-\mathcal{A})^{m_j}\ldots(\lambda_p\mathcal{I}-\mathcal{A})^{m_p}x_j = \theta$, ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{m_j}x_j = \theta$ в силу (91.8). Следовательно, $f(\mathcal{A})x = \theta$, $\forall x \in V$, т.е. $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

2. Пусть V – вещественное линейное пространство. Возьмем какой-либо базис e пространства V, и пусть A_e – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $f(A_e) = O$. Рассмотрим любое комплексное пространство V_1 той же размерности, что и V. Пусть f – произвольный базис V_1, тогда матрица A_e является матрицей оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V_1,V_1)$ в базисе f, т.е. $A_e = B_f$. Значит, характеристические многочлены операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают и, согласно п. 1 доказательства, $f(A_e) = O$. ■

Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в пространстве V над полем P. Многочлен $f(t) \in P[t]$ называется *аннулирующим многочленом* для оператора $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = 0$.

Теорема Гамильтона–Кэли устанавливает существование аннулирующего многочлена степени n, где $n = \dim V$. Многочлен $m(t)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом единица, аннулирующий $\mathcal{A}$, называется *минимальным многочленом* для оператора $\mathcal{A}$. Очевидно, он определен однозначно: если $m_1(t)$ и $m_2(t)$ – два таких многочлена, то многочлен $m_1(t) - m_2(t)$ аннулирует $\mathcal{A}$ и имеет строго меньшую степень, так что $m_1(t) - m_2(t) = 0$.

Теорема 92.5. *Минимальный многочлен является делителем аннулирующего многочлена.*

Доказательство. Пусть $f(t)$ и $m(t)$ – аннулирующий и минимальный многочлены для оператора $\mathcal{A}$. Разделим $f(t)$ на $m(t)$: $f(t) = m(t)q(t) + r(t)$, где либо $r(t) = 0$, либо $\deg r < \deg m$. Второе невозможно, так как $r(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) - m(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = 0$, $\deg r < \deg m$. Следовательно, $r(t) = 0$ и $m(t)$ – делитель $f(t)$. ■

Некоторые приложения. 1. Одно из важных приложений жордановой формы – вычисление функций от матрицы, в частности, вычисление больших степеней A^m матрицы A. Экономный способ такого

вычисления состоит в следующем: матрица A приводится к жордановой форме J, так что $A = XJX^{-1}$ и

$$A^m = XJ^mX^{-1}.$$

Матрица X вычисляется с помощью матрицы A и не зависит от m, а степень J^m жордановой матрицы J вычислить достаточно просто. В самом деле, вычисление J^m сводится к возведению в степень m диагональных клеток матрицы J, т.е. жордановых клеток $J_k(\lambda_j)$. Заметим, что

$$J_k(\lambda_j) = \lambda_j I + J_k(0), \quad J_k(0)^m = O, \quad m \geq k, \tag{92.8}$$

и что матрицы $\lambda_j I$ и $J_k(0)$ коммутируют.

2. С помощью жордановой формы легко вычислить минимальный многочлен. В самом деле, минимальный многочлен для $J_k(\lambda_j)$ равен $(t-\lambda_j)^k$, так как в силу (92.3) $(J_k(\lambda_j) - \lambda_j I)^m = J_k(0)^m$, а $J_k(0)^m = 0$ при $m \geq k$. Минимальный многочлен квазидиагональной матрицы с λ_j на главной диагонали равен $(t-\lambda_j)^{k_{\max}}$, где $k_{\max}$ – наибольший размер жордановой клетки с λ_j. Наконец, минимальный многочлен общей жордановой матрицы (92.4) равен

$$(t-\lambda_1)^{k_1} \dots (t-\lambda_p)^{k_p},$$

где k_j – наибольший размер жордановой клетки, отвечающей λ_j.

§ 93. Вещественный аналог жордановой формы

Инвариантные подпространства минимальной размерности.

Теорема 93.1. *У всякого линейного оператора в комплексном пространстве существует одномерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Утверждение следует из существования собственного вектора для любого оператора, действующего в комплексном пространстве (§86): если e – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, то $\mathcal{L}(e)$ – одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. ■

Теорема 93.2. *У всякого линейного оператора в вещественном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Пусть V – вещественное пространство, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$ – базис V и A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе g. Характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ является многочленом с вещественными коэффициентами, так как $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Пусть λ_0 – корень характеристического многочлена $f(\lambda)$.

1. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, то λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Тогда линейная оболочка $\mathcal{L}(e)$, натянутая на соответствующий собственный вектор e, образует одномерное подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$.

2. Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то $\bar{\lambda}_0 = \alpha - \beta i$ – тоже корень характеристического многочлена $f(\lambda)$. Рассмотрим A как комплексную матрицу, тогда λ_0 будет ее собственным значением и если $e \in \mathbb{C}^m$ – соответствующий собственный вектор, то

$$Ae = \lambda_0 e. \tag{93.1}$$

Обозначив $f = \bar{e} \in \mathbb{C}^n$ и перейдя в (93.1) к сопряжению, получим

$$Af = \bar{\lambda}_0 f.$$

Очевидно, e и f – линейно независимы, как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям.

Пусть $e = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)^T = x + iy$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Тогда равенство (93.1) может быть записано в виде

$$A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$$

или

$$\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y, \\ Ay = \beta x + \alpha y. \end{cases} \tag{93.2}$$

Векторы x, y – линейно независимы, так как

$$x = \frac{e + f}{2}, \quad y = \frac{e - f}{2i},$$

а векторы e, f, как указывалось выше, линейно независимы. Тогда если $u = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} y_i g_i$, то системе (93.2) соответствует система векторных уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = \alpha u - \beta v, \\ \mathcal{A}v = \beta u + \alpha v, \end{cases} \tag{93.3}$$

где u, v – векторы пространства V, одновременно не равные нулю. Из (93.3) следует, что $\mathcal{L}(u, v)$ – инвариантное подпространство. При этом $\dim \mathcal{L}(u, v) = 2$.

Итак, каждый вещественный корень характеристического многочлена порождает одномерное инвариантное пространство, а каждый комплексный (не вещественный) корень – двумерное инвариантное подпространство. ■

Вещественный аналог жордановой формы. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в n-мерном вещественном пространстве. Его характеристический многочлен $f(\lambda)$ – многочлен n-й степени с вещественными коэффициентами.

Если все корни $f(\lambda)$ вещественны, то к оператору $\mathcal{A}$ применима общая теория жордановой формы, т.е. в пространстве V существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму с *вещественными клетками* Жордана на главной диагонали.

Пусть $\lambda_0 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$ – комплексный корень многочлена $f(\lambda)$, тогда $\lambda_0 = \alpha - \beta i$ также будет корнем $f(\lambda)$, причем той же кратности, что и λ. Для исследования простейшей формы матрицы оператора $\mathcal{A}$ перейдем, как и в доказательстве теоремы 93.2, на матричный язык: вместо оператора $\mathcal{A}$ будем использовать его матрицу A в некотором базисе, вместо векторов – их координатные столбцы в том же базисе.

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ может быть рассмотрена как комплексная матрица и согласно общей теории в ее жордановой форме есть клетки с λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ на главной диагонали.

Рассмотрим серию базисных векторов $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{C}^n$, порождающую клетку $J_k(\lambda_0)$. Имеем

$$\begin{cases} Ae_1 = \lambda_0 e_1, \\ Ae_j = \lambda_0 e_j + e_{j-1}, \quad j = \overline{2,k}. \end{cases} \tag{93.4}$$

Обозначив $f_j = \bar{e}_j$, $j = \overline{1,k}$ и перейдя к сопряжению в (93.4), получим

$$\begin{cases} Af_1 = \bar{\lambda}_0 f_1, \\ Af_j = \bar{\lambda}_0 f_j + f_{j-1}, \quad j = \overline{2,k}. \end{cases}$$

Это означает, что линейно независимые векторы $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}^n$ порождают клетку $J_k(\bar{\lambda}_0)$. Таким образом, $J_k(\lambda_0)$ и $J_k(\bar{\lambda}_0)$ – клетки одинакового порядка k и их равное количество.

Покажем, что линейная оболочка базисных векторов, порождающих эти клетки, образует инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ размерности $2k$.

Представим каждый вектор e_j в виде: $e_j = x_j + iy_j$, где $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{cases} A(x_1 + iy_1) = (\alpha + \beta i)(x_1 + iy_1), \\ A(x_j + iy_j) = (\alpha + \beta i)(x_j + iy_j) + x_{j-1} + iy_{j-1}, \quad j = \overline{2,k}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax_1 = \alpha x_1 - \beta y_1, \\ Ay_1 = \beta x_1 + \alpha y_1, \\ Ax_j = \alpha x_j - \beta y_j + x_{j-1}, \\ Ay_j = \beta x_j + \alpha y_j + y_{j-1}, \quad j = \overline{2,k}. \end{cases} \tag{93.5}$$

Векторы $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ линейно независимы, так как

$$x_j = \frac{e_j + f_j}{2}, \quad y_j = \frac{e_j - f_j}{2i},$$

а линейная независимость $e_1, \dots, e_k$, $f_1, \dots, f_k$ следует из линейной независимости корневых векторов, отвечающих различным собственным значениям.

Равенства (93.5) означают, что в базисе подпространства L, векторы которого имеют координатные столбцы $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$, оператор $\mathcal{A}\big|_L$ имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ & & \alpha & \beta & 1 & 0 & & \\ & & -\beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \alpha & \beta \\ & & & & & & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \tag{93.6}$$

порядка $2k$.

Таким образом, каждый комплексный (не действительный) корень характеристического многочлена $f(\lambda)$ кратности k порождает клетку (93.6) порядка $2k$.

Теорема 93.3. *Для всякого линейного оператора, действующего в вещественном пространстве, существует базис, в котором матрица оператора имеет квазидиагональную форму с вещественными клетками Жордана и вещественными клетками вида (93.6) на главной диагонали.*

Доказательство. Для доказательства утверждения нужно взять жорданов базис матрицы A оператора, оставить в нем все векторы, порождающие вещественные клетки Жордана, а векторы, порождающие комплексные клетки $J_k(\lambda_0)$ и $J_k(\overline{\lambda}_0)$, заменить на векторы с координатными столбцами $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$. ■

Глава XVI. Линейные операторы в унитарных (евклидовых) пространствах

§ 94. Сопряженный оператор

Определения и свойства. В этом параграфе V и W – два пространства, оба унитарных или оба евклидовых.

Теорема 94.1. *Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – линейные операторы из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следующей цепочки простейших импликаций:

$$(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y), \forall x \in V, y \in W \Rightarrow (\mathcal{A}x - \mathcal{B}x, y) = 0, \forall y \in W \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{A}x - \mathcal{B}x = \theta \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{B}x, \quad \forall x \in V \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}. \blacksquare$$

Замечание. Очевидно, что из равенства $(x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{B}y), \forall x \in W$, $y \in V$, также следует, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^* : W \to V$ называется *сопряженным оператором к оператору* $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y), \quad \forall x \in V, y \in W. \tag{94.1}$$

Пример. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в геометрическом пространстве V_3 по правилу

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}], \quad \mathbf{a} \in V_3.$$

Тогда для любого вектора $\mathbf{y} \in V_3$

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([\mathbf{x}, \mathbf{a}], \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, [\mathbf{a}, \mathbf{y}]) = (\mathbf{x}, -[\mathbf{y}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{x}, -\mathcal{A}\mathbf{y}),$$

и, с другой стороны,

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}).$$

Таким образом, $(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, -\mathcal{A}\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_3$. Отсюда согласно теореме 94.1 следует, что $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

Теорема 94.2. *Сопряженный оператор линеен.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in W$, тогда согласно (94.1)

$$(\mathcal{A}x, y_1 + y_2) = (x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2)). \tag{94.2}$$

С другой стороны, $(\mathcal{A}x, y_1 + y_2) = (\mathcal{A}x, y_1) + (\mathcal{A}x, y_2) = (x, \mathcal{A}^*y_1) + (x, \mathcal{A}^*y_2) = (x, \mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2)$. Отсюда с учетом (94.2) получим, что $(x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2) - (\mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2)) = 0$, $\forall x \in V$, следовательно,

$$\mathcal{A}^*(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2, \quad \forall y_1, y_2 \in W. \tag{94.3}$$

Аналогично показывается, что

$$\mathcal{A}^*(\alpha y) = \alpha \mathcal{A}^* y, \quad \forall y \in W, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}). \tag{94.4}$$

Свойства (94.3), (94.4) доказывают линейность оператора $\mathcal{A}^*$. ■

Теорема 94.3. *Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ существует, и притом единственный, сопряженный оператор.*

Доказательство. Существование. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис V. Тогда для любого вектора $x \in V$ согласно (70.6) имеет место разложение $x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$. Следовательно, $\mathcal{A}x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\mathcal{A}e_k$ и в силу (70.7)

$$(\mathcal{A}x, y) = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)(\mathcal{A}e_k, y), \quad \forall y \in W. \tag{94.5}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, V)$, определенный равенством

$$\mathcal{B}y = \sum_{k=1}^{n}(y, \mathcal{A}e_k)e_k, \quad \forall y \in W,$$

является сопряженным к $\mathcal{A}$. Действительно, из того, что $(x, \mathcal{B}y) = (x, \sum_{k=1}^{n}(y, \mathcal{A}e_k)e_k) = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}e_k, y)(x, e_k)$, и равенства (94.5) следует, что $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$.

Единственность вытекает из теоремы 94.1, так как для любых двух операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, сопряженных к $\mathcal{A}$, имеет место соотношение $(x, \mathcal{B}y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{C}y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$. ■

Теорема 94.4. *Операция сопряжения линейного оператора обладает следующими свойствами:*

1) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,

2) $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$,

3) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$,

4) $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$,

5) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,

выполненными для любых операторов, для которых определены указанные операции.

Доказательство. Все свойства доказываются однотипно. Докажем свойства 3 и 4. Свойство 3 вытекает из (94.1) и теоремы 94.1, так как $(x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* y)$, $\forall x, y$. Свойство 4 (очевидно, для невырожденных $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$) вытекает из свойства 3, так как если $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$, то $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{I}$. Это означает, что оператор $(\mathcal{A}^{-1})^*$ является обратным к $\mathcal{A}^*$. ■

Матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в паре ортонормированных базисов. Пусть V и W – унитарные (евклидовы) пространства размерностей n и m соответственно.

Теорема 94.5. *Матрицы операторов $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V, W)$ в паре ортонормированных базисов сопряжены друг другу.*

Доказательство. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормированный базис V, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – ортонормированный базис W. Пусть,

далее, $A_{fe} = (a_{ij})$, $(\mathcal{A}^*)_{ef} = (b_{ij})$. Тогда

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k, \quad j = \overline{1,n}; \quad \mathcal{A}^* f_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} e_k, \quad k = \overline{1,m}$$

и

$$(\mathcal{A}e_j, f_i) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k, f_i\right) = a_{ij}. \tag{94.6}$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}e_j, f_i) = (e_j, \mathcal{A}^* f_i) = \left(e_j, \sum_{k=1}^{n} b_{ki} e_k\right) = \bar{b}_{ji}.$$

Отсюда и из (94.6) следует, что $a_{ij} = \bar{b}_{ji}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Таким образом,

$$(\mathcal{A}^*)_{ef} = (A_{fe})^H \quad (\text{соответственно } (\mathcal{A}^*)_{ef} = (A_{fe})^T). \ \blacksquare \tag{94.7}$$

Следствие. $$\operatorname{rg} \mathcal{A}^* = \operatorname{rg} \mathcal{A}. \tag{94.8}$$

Ядра и образы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Пусть V и W – унитарные (евклидовы) пространства.

Теорема 94.6. *Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*

$$\ker \mathcal{A} = \operatorname{im}^{\perp} \mathcal{A}^*, \quad \ker \mathcal{A}^* = \operatorname{im}^{\perp} \mathcal{A}. \tag{94.9}$$

Доказательство. Для любых векторов $x \in \ker \mathcal{A}$, $y \in \operatorname{im} \mathcal{A}^*$ имеем $\mathcal{A}x = \theta$, $y = \mathcal{A}^* y_1$. Значит, $(x, y) = (x, \mathcal{A}^* y_1) = (\mathcal{A}x, y_1) = 0$. Следовательно, $\ker \mathcal{A} \subset \operatorname{im}^{\perp} \mathcal{A}^*$. С другой стороны, в силу (80.2) и (94.8) получим

$$\dim \ker \mathcal{A} = \dim V - \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = \dim V - \dim \operatorname{im} \mathcal{A}^* = \dim \operatorname{im}^{\perp} \mathcal{A}^*.$$

Теорема 64.3 о монотонности размерности завершает доказательство первого из равенств (94.9). Второе доказывается аналогично. ■

§ 95. Сопряжение оператора, действующего в одном пространстве. Биортогональные базисы

Здесь и далее (если не будет дополнительных оговорок) будем рассматривать линейные операторы, действующие в одном пространстве V, унитарном или евклидовом.

Содержание §94 остается справедливым и для операторов, действующих в одном пространстве. Исключение составляет лишь теорема 94.5: в этом случае базисы e и f совпадают, и теорема будет относиться к одному ортонормированному базису e. Так, если e – ортонормированный базис V, то

$$(\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^H \quad (\text{соответственно } (\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^T) \tag{95.1}$$

и как следствие

$$\det \mathcal{A}^* = \overline{\det \mathcal{A}}. \tag{95.2}$$

Две системы векторов $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ в унитарном (евклидовом) пространстве V называются *биортогональными системами*, если $(x_i, y_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера (см. (70.2)).

Каждая из двух биортогональных систем векторов линейно независима. В этом можно убедиться, если приравнять линейную комбинацию одной системы нулевому вектору и последовательно умножать обе части полученного равенства скалярно на векторы другой системы.

Биортогональные системы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$, образующие базисы пространства V, называют *биортогональной парой базисов*. Итак,

$$(e_i, f_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{95.3}$$

Примером биортогональной пары базисов могут служить тройки некомпланарных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ геометрического пространства V_3, для которых $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$.

Очевидно, что ортонормированный базис биортогонален самому себе.

Теорема 95.1. *Для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ унитарного (евклидова) пространства существует, и притом единственный, биортогональный базис $f_1, \ldots, f_n$.*

Доказательство. Согласно (95.3) вектор f_j, $j = \overline{1,n}$, ортогонален всем векторам $e_1, \ldots, e_n$, кроме e_j. Следовательно, $f_j \in L_j$, где $L_j = \mathcal{L}^{\perp}(e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n)$. Очевидно, $\dim L_j = 1$. Если g – базис L_j, то $f_j = \alpha g$. Из (95.3) следует, что $(f_j, e_j) = 1$, откуда получаем, что $\alpha = 1/(g, e_j)$. Тем самым доказаны существование и единственность векторов f_j, $j = \overline{1,n}$, биортогонального базиса. ■

Теорема 95.2. *В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пространства V матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ связаны соотношением*

$$(\mathcal{A}^*)_f = (A_e)^H. \tag{95.4}$$

Доказательство. Пусть $A_e = (a_{ij})$, $(\mathcal{A}^*)_f = (b_{ij})$. Тогда $\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$, $\mathcal{A}^* f_i = \sum_{k=1}^n b_{ki} f_k$. Умножив первое из этих равенств скалярно на f_i, получим, что $(\mathcal{A}e_j, f_i) = \sum_{k=1}^n a_{kj}(e_k, f_i) = a_{ij}$.

С другой стороны, $(\mathcal{A}e_j, f_i) = (e_j, \mathcal{A}^* f_i) = \left(e_j, \sum_{k=1}^n b_{ki} f_k\right) = \sum_{k=1}^n \overline{b_{ki}}(e_j, f_k) = \overline{b_{ji}}$. Следовательно, $a_{ij} = \overline{b_{ji}}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Это равносильно (95.4). ■

Теорема 95.3. *Если подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Если $x \in L$, $y \in L^\perp$, то $(\mathcal{A}x, y) = 0$, так как по условию теоремы $\mathcal{A}x \in L$. С другой стороны, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$. Следовательно, $(x, \mathcal{A}^* y) = 0$, $\forall x \in L$ и, значит, $\mathcal{A}^* y \in L^\perp$. ■

§ 96. Нормальный оператор

Определение и свойства. Пусть V – унитарное или евклидово пространство. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *нормальным оператором*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется *нормальной матрицей*, если

$$AA^H = A^H A.$$

Замечание 1. Из определения и соотношения (95.1) следует, что оператор нормален тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе его матрица нормальна.

Теорема 96.1. *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\overline{\lambda}$.*

Доказательство. Легко проверить, что если $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, то $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ также нормален. Пусть теперь x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ; тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = \theta$ и $((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x) = 0$. Согласно (94.1) отсюда следует, что $(x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x) = 0$ или, с учетом нормальности оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$, что $(x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x) = 0$, т.е. $((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x) = 0$ и $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x = \theta$. Отсюда в силу теоремы 94.4 получаем, что $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{I})x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^* x = \overline{\lambda} x$. ■

Следствие 1. *Если $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, то*

$$\ker \mathcal{A} = \ker \mathcal{A}^*, \tag{96.1}$$

так как нетривиальные векторы ядра являются собственными векторами, отвечающими нулевому собственному значению.

Следствие 2. *Если $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, то*

$$\ker \mathcal{A} = \operatorname{im}^\perp \mathcal{A}, \quad \ker \mathcal{A}^* = \operatorname{im}^\perp \mathcal{A}^*.$$

Это следует из (94.9) и (96.1).

Теорема 96.2. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}y = \mu y$, $\lambda \neq \mu$. Тогда $(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. С другой стороны, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) = \{$ в силу теоремы 96.1 $\} = (x, \overline{\mu} y) = \mu(x, y)$. Следовательно, $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ и так как $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$. ■

Нормальный оператор и его матрица в унитарном пространстве.

Теорема 96.3 (теорема Шура). *Для любого оператора, действующего в унитарном пространстве, существует ортонормированный базис, в котором он имеет треугольную матрицу.*

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 89.2 только тем, что на каждом шаге строится ортонормированный базис инвариантного подпространства. ■

Ортонормированный базис унитарного (евклидова) пространства, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму, называется *базисом Шура* для этого оператора.

Теорема 96.4 (критерий нормальности). *Линейный оператор, действующий в унитарном пространстве, нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор и e – его базис Шура. Тогда

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

и, согласно (95.4) и замечанию 1, $A_e(A_e)^H = (A_e)^H A_e$. Сравнив диагональные элементы матриц, расположенных в левой и правой частях последнего соотношения, получим равенства

$$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 = |a_{11}|^2, \ |a_{22}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2 = \\ = |a_{22}|^2, \dots, |a_{n-1,n-1}|^2 + |a_{n-1,n}|^2 = |a_{n-1,n-1}|^2,$$

из которых следует, что

$$a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = 0, \ a_{23} = a_{24} = \dots = a_{2n} = 0, \dots, a_{n-1,n} = 0.$$

Следовательно, матрица A_e имеет диагональную форму. Таким образом, базис Шура является ортонормированным базисом из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Достаточность. Пусть e – ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, тогда

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Из перестановочности диагональных матриц следует, что A_e – нормальная матрица. Это означает (замечание 1), что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор. ■

Следствие 3. *В унитарном пространстве нормальный оператор $\mathcal{A}$ и его сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.*

Теорема 96.5. *Если любой собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, действующего в унитарном пространстве V, является собственным вектором сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A}$ – нормальный оператор.*

Доказательство. Любой оператор, действующий в комплексном пространстве, обладает хотя бы одним собственным вектором (теорема 86.6). Пусть $\dim V = n$ и e_1 – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, тогда e_1 – собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{L}(e_1)$ инвариантно $\mathcal{A}^*$. Согласно теореме 95.3 подпространство $L_{n-1} = \mathcal{L}^\perp(e_1)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. В этом подпространстве (в силу теоремы 86.6) существует собственный вектор $e_2 \in L_{n-1}$ оператора $\mathcal{A}$, при этом $e_2 \perp e_1$. Вектор e_2 также является собственным вектором $\mathcal{A}^*$, и по-прежнему $\mathcal{L}(e_2)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ и, следовательно, $L_{n-2} = \mathcal{L}^\perp(e_2)$ (имеется в виду ортогональное дополнение $\mathcal{L}(e_2)$ до L_{n-1}) инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Поступая аналогично, построим ортогональную систему собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$ оператора $\mathcal{A}$. Тогда векторы $e_1/|e_1|, \ldots, e_n/|e_n|$ образуют ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, и в силу теоремы 96.4 $\mathcal{A}$ – нормальный оператор. ■

Замечание 2. Отметим, что доказанная теорема является обратной к теореме 96.1 для случая унитарного пространства.

Унитарно подобные матрицы. Подобные комплексные (вещественные) матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ называются *унитарно* (соответственно *ортогонально*) *подобными*, если матрица преобразования подобия Q унитарна (соответственно ортогональна), т.е. если $Q^HQ = QQ^H = I$ (соответственно $Q^TQ = QQ^T = I$). Очевидно, что соотношение подобия для унитарно подобных матриц A и B имеет вид $B = Q^HAQ$, а для ортогонально подобных – вид $B = Q^TAQ$.

Замечание 3. Из теоремы 70.5 и свойства 8° §82 следует, что *две комплексные (вещественные) квадратные матрицы одинакового порядка унитарно (соответственно ортогонально) подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же оператора в унитарном (соответственно евклидовом) пространстве в ортонормированных базисах.*

Теорема 96.6. *Квадратная комплексная матрица нормальна тогда и только тогда, когда она унитарно подобна диагональной матрице*, или, в другой формулировке, *квадратная комплексная матрица n-го порядка нормальна тогда и только тогда, когда она имеет ортонормированную систему из n собственных векторов.*

Доказательство может быть проведено по известной схеме (88.6), если использовать ортонормированные базисы e, f и учесть замечание 3. ■

Доказанная теорема представляет собой матричную формулировку теоремы 96.4.

Нормальный оператор и его матрица в евклидовом пространстве. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор в евклидовом пространстве E. В любом ортонормированием базисе пространства он имеет *вещественную нормальную матрицу*, а его характеристический многочлен $f(\lambda)$ – *многочлен с вещественными коэффициентами*.

Если все корни многочлена $f(\lambda)$ действительны, то к оператору $\mathcal{A}$ применима теорема 96.4, согласно которой существует ортонормированный базис пространства E, в котором он имеет вещественную диагональную матрицу.

Пусть $\lambda_0 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$ – комплексный корень многочлена $f(\lambda)$. Для поиска простейшего вида матрицы оператора $\mathcal{A}$ вновь (§93) перейдем на матричный язык: вместо оператора $\mathcal{A}$ будем рассматривать его матрицу A в некотором ортонормированием базисе пространства E, а вместо векторов – их координатные столбцы в этом же базисе. Скалярное произведение векторов из E совпадает с естественным скалярным произведением их координатных столбцов из $\mathbb{R}^n$ (§68).

Матрицу A можно рассматривать как комплексную матрицу, тогда $\lambda_0 = \alpha + \beta i$ и $\overline{\lambda}_0 = \alpha - \beta i$ будут ее собственными значениями, причем одинаковой кратности.

Теорема 96.7. *Линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве, нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства, в котором он имеет квазидиагональную матрицу с вещественными клетками первого порядка и вещественными клетками второго порядка вида*

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta \neq 0, \tag{96.2}$$

на главной диагонали.

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственно.

Необходимость. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор и $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – его матрица в некотором ортонормированием базисе пространства. Очевидно, что A – нормальная матрица. Согласно теореме 96.6 матрица A (если ее рассматривать как комплексную матрицу) имеет ортонормированную систему $g_1, \ldots, g_n$ из собственных векторов. Если $\lambda_0 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, – корень характеристического многочлена, то λ_0 и $\overline{\lambda}_0$ будут собственными значениями матрицы A одинаковой кратности. Пусть e, f – собственные векторы (из $g_1, \ldots, g_n$) матрицы A, отвечающие собственным значениям λ_0 и $\overline{\lambda}_0$ соответственно. Если $e = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, то $f = x - iy$ и подпространство $\mathcal{L}(e, f) = \mathcal{L}(x, y)$

инвариантно относительно A, при этом

$$\begin{cases} Ae = \lambda_0 e, \\ Af = \bar{\lambda}_0 f \end{cases} \Leftrightarrow Ae = \lambda_0 e \Leftrightarrow \begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y, \\ Ay = \beta x + \alpha y. \end{cases} \tag{96.3}$$

Заметим, что векторы e и f ортогональны как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям λ_0 и $\bar{\lambda}_0$. Поэтому

$$(x + iy,\ x - iy) = |x|^2 - |y|^2 + 2i(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y|, \\ (x, y) = 0. \end{cases}$$

Так как $|x| = |y|$, то векторы $\frac{x}{|x|}$ и $\frac{y}{|y|}$ образуют ортонормированный базис $\mathcal{L}(x, y)$, при этом для этих векторов верны соотношения (96.3).

Вернемся к оператору $\mathcal{A}$. Если u и v – векторы с координатными столбцами $\frac{x}{|x|}$ и $\frac{y}{|y|}$ и $L = \mathcal{L}(u, v)$, то в силу (96.3) подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$ и матрица оператора $\mathcal{A}\big|_L$ в ортонормированием базисе u, v имеет вид (96.2).

Поступая так же с любой другой парой собственных значений λ, $\bar{\lambda}$, заменяя пары векторов e, f из системы собственных векторов $g_1, \ldots, g_n$ на соответствующие пары u, v и оставляя неизменными векторы, отвечающие вещественным собственным значениям, получим искомый базис. ■

Теорема 96.7 в матричной формулировке означает, что *вещественная матрица нормальна тогда и только тогда, когда она ортогонально подобна квазидиагональной матрице с вещественными клетками первого порядка и вещественными клетками второго порядка вида* (96.2) на диагонали.

§ 97. Унитарный (ортогональный) оператор

Линейный оператор $\mathcal{U}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется *унитарным* (соответственно *ортогональным*) оператором, если $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет унитарную (соответственно ортогональную) матрицу.

2°. Для унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$ справедливы равенства

$$\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}, \quad |\det \mathcal{U}| = 1. \tag{97.1}$$

3°. Унитарный (ортогональный) оператор нормален.

Линейный оператор $\mathcal{U}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве V, называется *изометричным*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. если

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

Теорема 97.1 (критерии унитарности). *В конечномерном унитарном (евклидовом) пространстве V следующие утверждения равносильны:*

1) оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален);

2) $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$;

3) $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$;

4) оператор $\mathcal{U}$ изометричен;

5) оператор $\mathcal{U}$ сохраняет длину, т.е.

$$|\mathcal{U}x| = |x|, \quad \forall x \in V;$$

6) оператор $\mathcal{U}$ переводит любой ортонормированный базис V в ортонормированный базис;

7) оператор $\mathcal{U}$ переводит хотя бы один ортонормированный базис V в ортонормированный базис.

Доказательство. 1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 3. Любое из равенств $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$ или $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$ означает невырожденность $\mathcal{U}$ и существование $\mathcal{U}^{-1}$. Умножение обеих частей этих равенств на $\mathcal{U}^{-1}$ (справа или слева) приводит к тому, что $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$. Следовательно, имеют место импликации 2 $\Rightarrow$ 1, 3 $\Rightarrow$ 1. Переход 1 $\Rightarrow$ 2, 1 $\Rightarrow$ 3 очевиден.

1 $\Rightarrow$ 4. Так как $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$, то

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}y) = (x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

4 $\Rightarrow$ 1. Так как $(x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y)$, $\forall x, y \in V$, то на основании теоремы 94.1 $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$.

4 $\Rightarrow$ 5. Это очевидно, так как $|\mathcal{U}x| = \sqrt{(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|$, $\forall x \in V$.

5 $\Rightarrow$ 4. Это следует из легко проверяемых соотношений:

$$(x, y) = (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)/2$$

в евклидовом пространстве и

$$(x, y) = (|x + y|^2 - |x - y|^2 + i|x + iy|^2 - i|x - iy|^2)/4$$

в унитарном пространстве.

4 $\Rightarrow$ 6. Очевидно, так как $(\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

6 $\Rightarrow$ 4. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис V и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то $\mathcal{U}x = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{U}e_i$, $\mathcal{U}y = \sum_{i=1}^n y_i \mathcal{U}e_i$, и так как $\mathcal{U}e_1, \ldots, \mathcal{U}e_n$ – ортонормированный базис, то, согласно (70.7), $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = (x, y)$, $\forall x, y \in V$.

6 $\Rightarrow$ 7. Очевидно.

7 $\Rightarrow$ 6. Этот переход фактически доказан в п. 6 $\Rightarrow$ 4. ■

Следствие. Унитарный (ортогональный) оператор на любом инвариантном подпространстве индуцирует унитарный (соответственно ортогональный) оператор, так как сохраняет скалярное произведение любой пары векторов этого подпространства.

Теорема 97.2. *Если подпространство L инвариантно относительно унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть $y \in L^\perp$. Покажем, что $\mathcal{U}y \in L^\perp$, т.е. $(x, \mathcal{U}y) = 0$, $\forall x \in L$. Оператор $\mathcal{U}$ индуцирует на подпространстве L унитарный (ортогональный) оператор $\mathcal{U}|L$. Значит, оператор $\mathcal{U}|L$

обратим и его образ совпадает со всем подпространством L, т.е. $\operatorname{im}\mathcal{U}|L = L$ (теорема 83.5). Это означает, что для любого вектора $x \in L$ существует вектор $x_1 \in L$ такой, что $x = \mathcal{U}x_1$. Тогда $(x, \mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x_1, \mathcal{U}y) = (x_1, y) = 0$, так как $x_1 \in L$, $y \in L^\perp$. ■

Теорема 97.3 (спектральная характеристика унитарного оператора). *Нормальный оператор в унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны единице.*

Доказательство. Необходимость справедлива в унитарном и евклидовом пространстве и означает, что все собственные значения унитарного (и ортогонального) оператора $\mathcal{U}$ по модулю равны единице. Докажем это. Пусть x – собственный вектор оператора $\mathcal{U}$ и λ – отвечающее ему собственное значение. Тогда $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2(x, x)$. С другой стороны, $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}x) = (x, x)$. Из этих равенств следует, что $|\lambda| = 1$.

Достаточность. Если $\mathcal{U}$ – нормальный оператор, то согласно теореме 96.4 в пространстве V существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{U}$. Тогда для любого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$ имеем $\mathcal{U}x = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$, где $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1,n}$. Отсюда в силу ортонормированности базиса e согласно (70.7) получаем $(x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ и $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Следовательно, $|\mathcal{U}x| = |x|$, $\forall x \in V$, и $\mathcal{U}$ – унитарный оператор (теорема 97.1). ■

Каноническая форма матрицы унитарного оператора. Из того, что унитарный оператор нормален и все его собственные значения по модулю равны единице, следует, что *в пространстве V существует ортонормированный базис e, в котором матрица унитарного оператора $\mathcal{U}$ имеет диагональную форму:*

$$U_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{где } |\lambda_i| = 1,\ i = \overline{1,n},$$

или, в матричной формулировке: *унитарная матрица унитарно подобна диагональной матрице, у которой все диагональные элементы по модулю равны единице.*

Каноническая форма матрицы ортогонального оператора. Пусть $\mathcal{Q}$ – ортогональный оператор, действующий в евклидовом пространстве E. Согласно теореме 97.2 (п. "необходимость") и второму из равенств (97.1) для его собственных значений λ и определителя (так как $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det \mathcal{Q} \in \mathbb{R}$) имеем

$$\lambda = \pm 1, \quad \det \mathcal{Q} = \pm 1. \tag{97.2}$$

В любом ортонормированном базисе e оператор $\mathcal{Q}$ имеет ортогональную матрицу Q_e, следовательно,

$$Q_e^{-1} = Q_e^T. \tag{97.3}$$

Одномерный случай. В одномерном пространстве матрица Q_e ортогонального оператора Q в ортонормированном базисе e_1 имеет вид

$$Q_e = [\pm 1]. \tag{97.4}$$

Иными словами, либо $Q_e = I$, либо $Q_e = -I$.

Двумерный случай. В двумерном пространстве, согласно теореме 96.7, существует ортонормированный базис e, в котором ортогональный оператор Q имеет либо вещественную диагональную матрицу, либо вещественную матрицу вида $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$. В первом случае на диагонали расположены собственные значения оператора Q, т.е. числа 1 или -1. Во втором случае, если $Q_e = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$, то $|Q_e| = \alpha^2 + \beta^2 = 1$. Положив $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = -\sin\varphi$, получим

$$Q_e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \neq \pi k. \tag{97.5}$$

Заметим, что Q_e – недиагонализуемая матрица, так как ее характеристический многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1$ не имеет вещественных корней (в силу $\varphi \neq \pi k$).

Таким образом, для любого ортогонального оператора в двумерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором оператор имеет одну из следующих матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \tag{97.6}$$

где $\varphi \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Общий случай.

Теорема 97.4. *Для любого ортогонального оператора Q в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис e, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму вида*

$$Q_e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & O & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & O & & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix} \end{bmatrix}. \tag{97.7}$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 96.7 с учетом (97.4) и 97.6. ■

Матрица (97.7) называется *канонической формой матрицы ортогонального оператора.*

Простым вращением называется оператор в евклидовом пространстве, который в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos\varphi & -\sin\varphi & & \\ & & & \sin\varphi & \cos\varphi & & \\ & & & & & 1 & \\ & O & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{97.8}$$

Простым отражением называется оператор в евклидовом пространстве, который в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & O & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{97.9}$$

Из определения следует, что простое вращение и простое отражение – ортогональные операторы, так как их матрицы (97.8) и (97.9) в ортонормированном базисе ортогональны. Простое вращение представляет собой поворот в некоторой двумерной плоскости и оставляет неизменным $(n-2)$-мерное подпространство, ортогональное этой плоскости. Простое отражение меняет направление всех векторов некоторого одномерного подпространства и оставляет неизменным его $(n-1)$-мерное ортогональное дополнение.

Теорема 97.5. *Всякий ортогональный оператор может быть представлен как композиция некоторого числа простых вращений и простых отражений.*

Это утверждение следует из того, что матрица вида (97.7) может быть представлена в виде произведения некоторого числа матриц вида (97.8), (97.9). ■

§ 98. Самосопряженный оператор

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется *самосопряженным*, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Самосопряженный оператор в унитарном пространстве называют *эрмитовым*, а в евклидовом пространстве – *симметрическим*.

Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется *самосопряженной*, если $A = A^H$. Комплексную самосопряженную матрицу называют *эрмитовой*, а вещественную – *симметрической* или *вещественно-эрмитовой* (очевидно, для симметрической матрицы: $A = A^T$).

Из определения вытекают следующие свойства.

1°. Самосопряженный оператор нормален.

2°. Оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет самосопряженную матрицу.

3°. Определитель самосопряженного оператора вещественен.

4°. Если подпространство L инвариантно относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$ (теорема 95.4).

5°. Самосопряженный оператор на любом инвариантном подпространстве индуцирует самосопряженный оператор.

Теорема 98.1 (спектральная характеристика самосопряженного оператора). *Нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Доказательство. Необходимость. В унитарном пространстве это утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из равенств $\mathcal{A}x = \lambda x$ и, с учетом теоремы 96.1, $\mathcal{A}x = \overline{\lambda}x$. Докажем утверждение для евклидова пространства E. Пусть e – ортонормированный базис E, тогда A_e – самосопряженная (вещественная) матрица. Рассмотрим произвольное унитарное пространство U той же размерности, что и пространство E, и в нем произвольный ортонормированный базис f. Тогда матрице A_e отвечает самосопряженный оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, U)$, для которого матрица A_e является матрицей в базисе f: $A_e = B_f$. Следовательно, характеристические многочлены операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают и по доказанному выше (применительно к оператору $\mathcal{B}$) все корни характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ вещественны.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор и все корни его характеристического многочлена вещественны. Тогда как в евклидовом, так и в унитарном пространстве существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – любой вектор пространства, то $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ и $\mathcal{A}^* x = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\lambda_i} e_i = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$, так как $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\mathcal{A}x = \mathcal{A}^* x$, $\forall x \in V$, откуда следует, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. ■

Итак, для самосопряженных операторов основное поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) не играет такой "роковой" роли, как это было с другими операторами; все утверждения, относящиеся к эрмитовым операторам и матрицам справедливы и для симметрических операторов и матриц.

В частности, как следует из теоремы 98.1, *нормальный оператор, действующий в унитарном (или евклидовом) пространстве, самосопряжен тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму*, или, в матричной формулировке: *нормальная матрица (комплексная или вещественная) является самосопряженной тогда и только тогда, когда она унитарно* (соответственно, *ортогонально*) *подобна вещественной диагональной матрице.*

§ 99. Знакоопределенные операторы

Теорема 99.1. *Если в унитарном пространстве V для любого вектора x имеет место равенство $(\mathcal{B}x, x) = 0$, то $\mathcal{B} = \mathcal{O}$.*

Доказательство. Для любых векторов $y, z \in V$ имеем $(\mathcal{B}(y + z), y + z) = 0$ и $(\mathcal{B}(iy + z), iy + z) = 0$, т.е. $(\mathcal{B}y, y) + (\mathcal{B}z, y) + (\mathcal{B}y, z) + (\mathcal{B}z, z) = 0$, $(\mathcal{B}y, y) - i(\mathcal{B}z, y) + i(\mathcal{B}y, z) + (\mathcal{B}z, z) = 0$ или, с учетом условия теоремы, $(\mathcal{B}z, y) + (\mathcal{B}y, z) = 0$, $-i(\mathcal{B}z, y) + i(\mathcal{B}y, z) = 0$. Прибавив к первому равенству второе, умноженное на $-i$, получим, что $(\mathcal{B}y, z) = 0$, $\forall y, z \in V$. Следовательно, $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ (теорема 94.1). ■

Теорема 99.2. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве V эрмитов тогда и только тогда, когда*

$$(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V. \tag{99.1}$$

Доказательство. Необходимость. Если $\mathcal{A}$ – эрмитов оператор, то $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = (x, \mathcal{A}x)$, $\forall x \in V$; следовательно,

$$(\mathcal{A}x, x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)} \text{ и } (\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in V.$$

Достаточность. Пусть $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$. Тогда $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x)$ и $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x)$. Отсюда следует, что

$$(x, (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

Отсюда на основании теоремы 99.1 следует, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. ■

Замечание. Условие (99.1) формально верно и в евклидовом пространстве, однако лишено смысла, так как справедливо для любых линейных операторов $\mathcal{A}$.

Теорема 99.2 позволяет для самосопряженных операторов $\mathcal{A}$ говорить о знаке числа $(\mathcal{A}x, x)$. Самосопряженный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве называется *положительно определенным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) > 0, \quad \forall x \neq \theta,$$

неотрицательно определенным (отрицательно определенным или *неположительно определенным)*, если $(\mathcal{A}x, x) \geq 0$, $\forall x \neq \theta$ (соответственно $(\mathcal{A}x, x) < 0$ или $(\mathcal{A}x, x) \leq 0$). Обозначение: $\mathcal{A} > \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \geq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$ соответственно.

Если $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис пространства V, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ согласно (70.7) может быть записано в виде

$$(\mathcal{A}x, x) = x_e^H A_e x_e \quad \text{для унитарного пространства,}$$
$$(\mathcal{A}x, x) = x_e^T A_e x_e \quad \text{для евклидова пространства,}$$

или

$$(\mathcal{A}x, x) = (A_e x_e, x_e) \tag{99.2}$$

в естественном скалярном произведении арифметического пространства $\mathbb{C}$ (в случае унитарного пространства) или $\mathbb{R}$ (в случае евклидова пространства).

Эрмитова (или симметрическая) матрица A называется *положительно определенной*, если

$$x^H A x > 0, \quad x \neq \theta$$

(соответственно $x^T A x > 0$, $\forall x \neq \theta$) или если

$$(Ax, x) > 0, \quad x \neq \theta$$

в естественном скалярном произведении арифметического пространства $\mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$).

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}$ положительно определен тогда и только тогда, когда в любом ортонормированием базисе он имеет положительно определенную матрицу.

Теорема 99.3. *Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном (и евклидовом) пространстве положительно определен (соответственно $\mathcal{A} \geq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$) тогда и только тогда, когда все его собственные значения $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$, $\lambda < 0$, $\lambda \leq 0$).*

Доказательство. Докажем вариант теоремы, относящийся к случаю $\mathcal{A} > \mathcal{O}$. Необходимость. Если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$ для любого вектора $x \neq \theta$. В частности, это верно и для собственного вектора x, поэтому $(\mathcal{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) > 0$, где $(x, x) > 0$. Значит, $\lambda > 0$.

Достаточность. Если $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис из собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$ оператора $\mathcal{A}$. При этом соответствующие собственные значения $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Тогда для любого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \neq \theta$ имеем

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 > 0. \quad \blacksquare$$

Следствие. Если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$ (или $\mathcal{A} < \mathcal{O}$), то оператор $\mathcal{A}$ обратим, так как $\det \mathcal{A} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Теорема 99.4. *Оператор, обратный к положительно (отрицательно) определенному оператору, положительно (соответственно отрицательно) определен.*

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор, то $\mathcal{A}^{-1}$ – тоже самосопряженный оператор, так как согласно теореме 94.4 $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$. Если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$ $(\mathcal{A} < \mathcal{O})$, то все собственные значения оператора $\mathcal{A}^{-1}$ положительны (соответственно отрицательны), так как они обратны собственным значениям оператора $\mathcal{A}$. Из теоремы 99.3 следует, что $\mathcal{A}^{-1} > \mathcal{O}$ $(\mathcal{A}^{-1} < \mathcal{O})$. ■

Теорема 99.5. *Для любого неотрицательно (положительно) определенного оператора $\mathcal{A}$ существует, и притом единственный, неотрицательно (соответственно положительно) определенный оператор $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.*

Доказательство. Существование. Построим оператор $\mathcal{B}$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = \overline{1,n}$. По условию теоремы $\lambda_i \geq 0$ $(\lambda_i > 0)$, $i = \overline{1,n}$. Положим

$$\mathcal{B}e_i = \sqrt{\lambda_i}e_i\,, \quad i = \overline{1,n}. \tag{99.3}$$

Из (99.3) следует, что оператор $\mathcal{B} \geq \mathcal{O}$ $(\mathcal{B} > \mathcal{O})$, так как $\mathcal{B}$ – нормальный оператор (ибо существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов $\mathcal{B}$), при этом он самосопряжен (ибо его собственные значения $\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{R}$) и, кроме того, $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$ $(\sqrt{\lambda_i} > 0)$. Оператор $\mathcal{B}$ – искомый, так как в силу (99.3) $\mathcal{B}^2 e_i = \lambda_i e_i = \mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$.

Единственность. Пусть существует другой оператор $\mathcal{C} \geq \mathcal{O}$ $(\mathcal{C} > \mathcal{O})$ такой, что $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$. Тогда существует ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$ пространства из собственных векторов оператора $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{C}f_i = \mu_i f_i$, $i = \overline{1,n}$, то $\mathcal{A}f_i = \mathcal{C}^2 f_i = \mu_i^2 f_i$, $i = \overline{1,n}$. Значит, числа $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ и, следовательно, совпадают с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Покажем, что

$$\mathcal{C}e_i = \sqrt{\lambda_i}e_i\,, \quad i = \overline{1,n}\,, \tag{99.4}$$

тем самым в силу (99.3) будет доказано, что $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Разложим вектор e_i по базису f:

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\,. \tag{99.5}$$

Отметим, что в этом равенстве участвуют собственные векторы e_i, $f_1, \ldots, f_n$ оператора $\mathcal{A}$, отвечающие собственным значениям λ_i, μ_1^2, …, μ_n^2. Из линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, следует, что в разложении (99.5) отличными от нуля будут коэффициенты α_k лишь при тех f_k, которые отвечают собственному значению $\mu_k^2 = \lambda_i$. Поэтому $\mathcal{C}e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{C}f_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sqrt{\lambda_i} f_k = \sqrt{\lambda_i} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \sqrt{\lambda_i} e_i$, т.е. выполняются равенства (99.4). ■

Оператор $\mathcal{B}$ называется *квадратным корнем из оператора* $\mathcal{A}$.

В заключение отметим, что в линейной алгебре рассматриваются и операторные (матричные) неравенства: говорят, что для самосопряженных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (матриц A и B) имеет место неравенство $\mathcal{A} > \mathcal{B}$ ($A > B$), если $\mathcal{A} - \mathcal{B} > 0$ (соответственно $A - B > 0$). Аналогично определяются неравенства $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

§ 100. Разложения линейного оператора

Эрмитово разложение. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном (евклидовом) пространстве V называется *косоэрмитовым* (соответственно *кососимметрическим*), если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

Квадратная комплексная матрица называется *косоэрмитовой*, если $A^H = -A$. Квадратная вещественная матрица называется *кососимметрической*, если $A^T = -A$.

Из определения следует, что

1) косоэрмитов (кососимметрический) оператор нормален;

2) оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов (кососимметричен) тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе косоэрмитова (соответственно кососимметрична);

3) все собственные значения косоэрмитова оператора в унитарном пространстве — чисто мнимые (так как если $Ax = \lambda x$, то $-Ax = \bar{\lambda}x$, т.е. $\lambda = -\bar{\lambda}$) и следовательно, все корни характеристического многочлена косоэрмитова и кососимметрического операторов – чисто мнимые; отсюда следует, что

4) кососимметрический оператор не имеет собственных значений.

Теорема 100.1. *Для любого косоэрмитова оператора $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве существует эрмитов оператор $\mathcal{B}$ такой, что*

$$\mathcal{A} = i\mathcal{B}.$$

Доказательство. Оператор $\mathcal{A}$ нормален, следовательно, существует ортонормированный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ пространства из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие им собственные значения, то $\lambda_k = i\beta_k$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$ и $\mathcal{A}e_k = i\beta_k e_k$. Положив $\mathcal{B}e_k = \beta_k e_k$, $k = \overline{1,n}$, получим искомый эрмитов оператор $\mathcal{B}$. ■

Теорема 100.2. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном (евклидовом) пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде суммы*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \tag{100.1}$$

эрмитова (симметрического) оператора $\mathcal{B}$ и косоэрмитова (кососимметрического) оператора $\mathcal{C}$.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*). \tag{100.2}$$

Тогда, как легко проверить, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}^* = -\mathcal{C}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$. Единственность такой пары операторов следует из того, что для любой другой пары операторов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{C}_1$ таких, что $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1^* = -\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1$, имеем $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}_1 - \mathcal{C}_1$ или $\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) = \mathcal{B}_1$, $\frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) = \mathcal{C}_1$, т.е. в силу (100.2) $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$. ■

Разложение (100.1) называется *эрмитовым разложением* оператора $\mathcal{A}$.

В силу теоремы 100.1 эрмитово разложение оператора в унитарном пространстве может быть записано в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} + i\mathcal{D},$$

где $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ – эрмитовы операторы.

Теорема 100.3. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном (евклидовом) пространстве нормален тогда и только тогда, когда операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в эрмитовом разложении* (100.1) *этого оператора перестановочны.*

Доказательство. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, то $\mathcal{A}^* = \mathcal{B} - \mathcal{C}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2 - \mathcal{B}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{C}^2$, т.е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* - \mathcal{A}^*\mathcal{A} = 2(\mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{C})$. Значит, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. ■

Сингулярная пара базисов и сингулярное разложение. Пусть V и W – два унитарных (или два евклидовых) пространства и $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Теорема 100.4. *Для любого линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ранга r существуют положительные числа $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_r > 0$, ортонормированные базисы $e = (e_1, \ldots, e_n)$ пространства V и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ пространства W такие, что*

$$\mathcal{A}e_k = \begin{cases} \rho_k f_k, & k = \overline{1, r}; \\ \theta, & k = \overline{r+1, n}, \end{cases} \tag{100.3}$$

$$\mathcal{A}^* f_k = \begin{cases} \rho_k e_k, & k = \overline{1, r}; \\ \theta, & k = \overline{r+1, m}. \end{cases} \tag{100.4}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Заметим, что

а) $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(W, W)$;

б) $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ – самосопряженные операторы, так как $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$;

в) $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$, так как

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x,\ x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0, \quad \forall x \neq \theta;$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*x,\ x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) \geq 0, \quad \forall x \neq \theta.$$

2. Для оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ (в силу п. 1"б") существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов, причем (в силу п. 1"в") соответствующие собственные значения неотрицательны. Пусть $\operatorname{rg}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = t$ и векторы $e_1, \ldots, e_n$ пронумерованы так, что первые t собственных значений $\rho_1^2, \ldots, \rho_t^2$ отличны от нуля, причем $\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \ldots \geq \rho_t^2$, а остальные собственные значения $\rho_{t+1}^2, \ldots, \rho_n^2$ равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} \rho_k^2 > 0, & k \leq t, \\ \rho_k^2 = 0, & k > t, \end{cases} \tag{100.5}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*\mathcal{A}e_k = \rho_k^2 e_k, & k \leq t, \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A}e_k = \theta, & k > t. \end{cases} \tag{100.6}$$

3. Рассмотрим систему векторов $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Заметим, что

а) $\mathcal{A}e_k \in W, \quad k = \overline{1,n}$;

б) $(\mathcal{A}e_k,\ \mathcal{A}e_j) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}e_k, e_j) = \rho_k^2(e_k, e_j) = \begin{cases} \rho_k^2, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$ (100.7)

Из (100.7) следует, что $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_t$ – ненулевые попарно ортогональные векторы из W, а

$$\mathcal{A}e_k = \theta, \quad k > t. \tag{100.8}$$

Таким образом, векторы $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_t$ образуют базис $im\mathcal{A}$, так что

$$t = r.$$

Пусть $\rho_k = \sqrt{\rho_k^2}, \quad k = \overline{1,n}$. Тогда $\rho_k > 0$, $k = \overline{1,r}$ и $|\mathcal{A}e_k| = \rho_k$, $k = \overline{1,r}$. Обозначим

$$f_k = \frac{1}{\rho_k}\mathcal{A}e_k, \quad k = \overline{1,r}. \tag{100.9}$$

Из (100.9) и (100.8) следует, что

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_k = \rho_k f_k, & k \leq r, \\ \mathcal{A}e_k = \theta, & k > r. \end{cases} \tag{100.10}$$

Векторы $f_1, \ldots, f_r$ образуют ортонормированную систему. Дополним их до ортонормированного базиса W: $f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_m$.

Векторы $f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_m$ являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающими собственным значениям $\rho_1^2, \ldots, \rho_r^2$, $0, \ldots, 0$, так как

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* f_k = \mathcal{A}\mathcal{A}^*\left(\frac{1}{\rho_k}\mathcal{A}e_k\right) = \frac{1}{\rho_k}\mathcal{A}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}e_k) = \frac{\rho_k^2}{\rho_k}\mathcal{A}e_k = \rho_k \mathcal{A}e_k = \rho_k^2 f_k, \quad k = \overline{1,r}$$

4. Таким образом, построены ортонормированный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ пространства V из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и ортонормированный базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$ пространства W из собственных векторов оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Из (100.10) следует, что оператор $\mathcal{A}$ в паре базисов e и f имеет прямоугольную диагональную матрицу

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \rho_r & & O \\ & & & 0 & \\ & O & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{100.11}$$

размера $m \times n$ с невозрастающими неотрицательными элементами на диагонали.

Согласно (94.7) оператор $\mathcal{A}^*$ в паре базисов f и e имеет матрицу

$$(\mathcal{A}^*)_{ef} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & & \\ & \ddots & & & O \\ & & \rho_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & O & & & 0 \end{bmatrix}$$

размера $n \times m$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{A}^* f_k = \begin{cases} \rho_k e_k, & k \le r; \\ \theta, & k > r. \end{cases}$$

Это соотношение вместе с (100.10) завершает доказательство теоремы. ■

Следствие 1. $r = \operatorname{rg}\mathcal{A} = \operatorname{rg}\mathcal{A}^* = \operatorname{rg}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \operatorname{rg}\mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

Следствие 2. *Ненулевые собственные значения операторов* $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ *совпадают. Если* $s = \min(m, n)$, *то операторы* $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ *имеют еще и* $s - r$ *общих нулевых собственных значений.*

Следствие 3.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_r),\\
&\ker\mathcal{A} = \mathcal{L}(e_{r+1}, \ldots, e_n),\\
&\operatorname{im}\mathcal{A}^* = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_r),\\
&\ker\mathcal{A}^* = \mathcal{L}(f_{r+1}, \ldots, f_m).
\end{aligned}$$

Замечание 1. Очевидно, что теорема 100.4 справедлива и для операторов, действующих в одном пространстве.

Числа $\rho_1, \ldots, \rho_s$ (т.е. арифметические значения квадратных корней из общих собственных значений операторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$) называются *сингулярными числами оператора* $\mathcal{A}$.

Векторы $e_1, \ldots, e_n$ называются *правыми сингулярными векторами* оператора $\mathcal{A}$, а векторы $f_1, \ldots, f_m$ — *левыми*.

Теорема 100.5 (матричная формулировка теоремы 100.4). *Для любой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $(\mathbb{R}^{m\times n})$ *ранга* r *существуют положительные числа* $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_r$, *унитарные* (*ортогональные*) *матрицы* $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(\mathbb{R}^{n\times n})$ *и* $D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ $(\mathbb{R}^{m\times m})$ *такие, что*

$$A = D\Lambda C^H \quad (A = D\Lambda C^T), \tag{100.12}$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \rho_r & & O \\ & & & 0 & \\ & O & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

— *прямоугольная диагональная матрица размера* $m \times n$.

Доказательство можно провести по схеме, аналогичной (88.6). Приведем другое доказательство. Теорема 100.4 означает, что для любой матрицы A существуют положительные числа $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_r > 0$ и ортонормированные системы векторов $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$, $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}^m)$ такие, что

$$Ae_k = \begin{cases} \rho_k f_k, & k = \overline{1, r};\\ \theta, & k = \overline{r+1, n}; \end{cases} \qquad A^H f_k = \begin{cases} \rho_k e_k, & k = \overline{1, r};\\ \theta, & k = \overline{r+1, m}. \end{cases} \tag{100.13}$$

Соотношения (100.13) равносильны матричному равенству

$$A[e_1 \dots e_n] = [f_1 \dots f_m]\Lambda$$

или, в обозначениях

$$C = [e_1 \dots e_n], \quad D = [f_1 \dots f_m],$$

равенству (100.12). Остается добавить, что матрицы $C \in \mathbb{C}^{n\times n}(\mathbb{R}^{n\times n})$ и $D \in \mathbb{C}^{m\times m}(\mathbb{R}^{m\times m})$ – унитарные (ортогональные) матрицы как матрицы с ортонормированными столбцами. ■

Векторы $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$ из (100.13) называются соответственно *правыми и левыми сингулярными векторами матрицы* A, числа $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$, где $s = \min(m, n)$, (т.е. арифметические квадратные корни из общих собственных значений матриц $A^H A$ и AA^H) – *сингулярными числами матрицы* A, а соотношение (100.12) – *сингулярным разложением матрицы* A.

Полярное разложение. Теорема 100.4 верна и для оператора $\mathcal{A}$, действующего в одном пространстве V, унитарном или евклидовом. Отличие состоит лишь в том, что сингулярные базисы состоят из одинакового числа векторов.

Теорема 100.6. *Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U} \tag{100.14}$$

неотрицательного оператора $\mathcal{B}$ и унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$. При этом оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно, а если $\mathcal{A}$ обратим, то и оператор $\mathcal{U}$ определен однозначно.

Доказательство. Существование. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – сингулярная пара базисов для оператора $\mathcal{A}$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{U}e_k &= f_k, \quad k = \overline{1,n}; \\ \mathcal{B}f_k &= \rho_k f_k, \quad k = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{100.15}$$

Тогда $\mathcal{U}$ — унитарный (ортогональный) оператор, так как он переводит ортонормированный базис e в ортонормированный базис f; $\mathcal{B} \geq 0$ как нормальный оператор (ибо ортонормированный базис f состоит из его собственных векторов), собственные значения которого неотрицательны (уточним, что $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_r > 0$, $\rho_{r+1} = \dots = \rho_n = 0$). При этом $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, так как согласно (100.3) $\mathcal{A}e_k = \rho_k f_k$, $k = \overline{1,n}$ и согласно (100.15) $\mathcal{B}\mathcal{U}e_k = \rho_k f_k$, $k = \overline{1,n}$.

Единственность. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ – разложение (100.14) оператора $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$. Таким образом, $\mathcal{B}$ – квадратный корень из оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, который на основании теоремы 99.5 существует и определен однозначно. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то согласно следствию 1 обратим и оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, поэтому $\rho_k \neq 0$,

$k = \overline{1,n}$, и в силу (100.15) обратим оператор B. Отсюда и из (100.14) следует, что $U = B^{-1}A$. ■

Разложение 100.14 называется *полярным разложением* оператора.

Замечание 2. Для любого оператора A имеет место разложение $A = VC$, где V – унитарный (ортогональный) оператор, $C \geq 0$. Оно может быть получено из полярного разложения сопряженного оператора $A^* = BU$ переходом к оператору A: $A = U^*B$, где $U^* = V$ – унитарный (ортогональный) оператор.

Теорема 100.7. *Линейный оператор A в унитарном (евклидовом) пространстве нормален тогда и только тогда, когда в любом его полярном разложении операторы B и U перестановочны.*

Доказательство. Пусть $A = BU$ – полярное разложение оператора A. Тогда $AA^* = B^2$, $A^*A = U^*B^2U$.

Достаточность очевидна, так как если $BU = UB$, то $A^*A = U^*B^2U = U^*B(BU) = U^*B(UB) = U^*(BU)B = U^*(UB)B = U^*UB^2 = B^2 = AA^*$.

Необходимость. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис из собственных векторов A^*A, то

$$A^*Ae_k = \rho_k^2 e_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{100.16}$$

С другой стороны, $A^*A = U^*B^2U$ и, значит, $U^*B^2Ue_k = \rho_k^2 e_k$, т.е.

$$B^2Ue_k = \rho_k^2 Ue_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{100.17}$$

Так как оператор U унитарен, то векторы $Ue_1, \ldots, Ue_n$ образуют ортонормированный базис, поэтому в соответствии с (99.3) из (100.17) получим

$$BUe_k = \rho_k Ue_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{100.18}$$

С другой стороны, $A^*A = AA^* = B^2$ и согласно (100.16) $B^2e_k = \rho_k^2 e_k$ или, в соответствии с (99.3), $Be_k = \rho_k e_k$, откуда умножением на U слева получим, что

$$UBe_k = \rho_k Ue_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{100.19}$$

Сравнение равенств (100.18) и (100.19) доказывает, что $BU = UB$. ■

Глава XVII. Билинейные и квадратичные формы

В §58 была рассмотрена одна из основных задач аналитической геометрии на плоскости – приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Теория квадратичных форм, излагаемая здесь, ставит основной своей целью решение этой и связанных с нею задач в пространстве любой размерности.

§ 101. Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве

Билинейные формы. Пусть V – линейное пространство над полем P[1]. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ называется *билинейной формой* в пространстве V, если для любых $x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

$$\begin{array}{l} 1)\ \mathcal{A}(x+y,z) = \mathcal{A}(x,z) + \mathcal{A}(y,z); \\ 2)\ \mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha \mathcal{A}(x,y); \\ 3)\ \mathcal{A}(x, y+z) = \mathcal{A}(x,y) + \mathcal{A}(x,z); \\ 4)\ \mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x,y). \end{array} \tag{101.1}$$

Билинейная форма называется *симметричной*, если $\mathcal{A}(y,x) = \mathcal{A}(x,y)$, $\forall x, y \in V$, и *кососимметричной*, если $\mathcal{A}(y,x) = -\mathcal{A}(x,y)$, $\forall x, y \in V$.

Примеры. 1. Скалярное произведение (x,y) в евклидовом пространстве является симметричной билинейной формой.

2. В любом линейном пространстве V, если $f(x)$, $g(x)$ – линейные формы, то функция $\mathcal{A}(x,y) = f(x)g(y)$ является симметричной билинейной формой.

3. В n-мерном пространстве V с базисом $e_1, \ldots, e_n$ отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$, определенное правилом

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{101.2}$$

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, где a_{ij} $(i,j = \overline{1,n})$ – фиксированные числа, является билинейной формой (в силу линейности координат).

Теорема 101.1. *Пусть V – линейное пространство над полем P и $e_1, \ldots, e_n$ – базис V. Для любых чисел $a_{ij} \in P$, $i,j = \overline{1,n}$, существует, и притом единственная, билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ в пространстве V, для которой $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i,j = \overline{1,n}$.*

[1] В этой главе предполагается, что характеристика основного поля равна нулю.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V и a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, – заданные числа. Отображение (101.2) является билинейной формой в пространстве V (пример 3), причем $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$ (так как векторы e_i и e_j имеют очевидные наборы координат в базисе $e_1, \ldots, e_n$). Покажем, что любая билинейная форма $\mathcal{B}(x, y)$ в пространстве V, для которой $\mathcal{B}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$, совпадает с $\mathcal{A}(x, y)$. В самом деле, для любых векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ в силу (101.1) имеем $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) =$ $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathcal{B}(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, т.е. $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{A}(x, y)$, $\forall x, y \in V$. ■

Таким образом, в примере 3 приведен самый общий вид билинейной формы в n-мерном пространстве.

Представление билинейной формы в виде (101.2) называется *общим видом билинейной формы в базисе e*. Матрица $A_e = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$, элементы которой определены равенством $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, называется *матрицей билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ в базисе e*.

Как следует из теоремы 101.1, билинейная форма однозначно определяется своим заданием на базисных векторах, при этом матрица билинейной формы представляет собой таблицу ее значений на парах базисных векторов и в силу (101.2) однозначно определяет значения этой формы для любой пары векторов.

Общий вид (101.2) билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ может быть записан в компактной форме: если x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в базисе e, то

$$\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e, \qquad \mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e^T x_e. \tag{101.3}$$

Первое из равенств (101.3) проверяется непосредственно, второе равенство можно получить транспонированием обеих частей первого.

Выражение в правой части равенства (101.2) называется *билинейной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$*. Правые части равенств (101.3) представляют собой компактную запись этой билинейной формы.

Теорема 101.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех билинейных форм в n-мерном пространстве V над полем P и множеством матриц $P^{n \times n}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V. Поставим в соответствие каждой билинейной форме $\mathcal{A}(x, y)$ ее матрицу $A_e \in P^{n \times n}$. Это соответствие биективно, так как каждая матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ в силу теоремы 101.1 является матрицей билинейной формы (101.2) и в силу однозначности координат различные билинейные формы имеют разные матрицы. ■

Теорема 101.3. *Билинейная форма симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда ее матрица в любом базисе симметрична (соответственно кососимметрична).*

Доказательство. Необходимость проверяется непосредственно.

Достаточность. Если $A_e^T = A_e$ то, согласно (101.3), $\mathcal{A}(x, y) =$ $= y_e^T A_e^T x_e = \mathcal{A}(y, x)$. ■

Теорема 101.4. *Матрицы билинейной формы $\mathcal{A}(x,y)$ в базисах e и $f = eQ$ связаны соотношением $A_f = Q^T A_e Q$.*

Доказательство. Согласно (101.3), с одной стороны, $\mathcal{A}(x,y) = x_e^T A_e y_e = \{x_e = Qx_f, y_e = Qy_f\} = x_f^T Q^T A_e Q y_f$. С другой стороны, $\mathcal{A}(x,y) = x_f^T A_f y_f$. Отсюда с учетом произвольности x, y следует утверждение теоремы. ■

Следствие. $\operatorname{rg} A_e = \operatorname{rg} A_f$.

Таким образом, все матрицы одной билинейной формы имеют одинаковый ранг. *Рангом билинейной формы* называется ранг ее матрицы в произвольном базисе. Билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ называется *вырожденной*, если $\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,y) < \dim V$, и *невырожденной*, если $\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,y) = \dim V$.

Теорема 101.5. *Билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ вырождена тогда и только тогда, когда существует вектор $x \neq \theta$ такой, что*

$$\mathcal{A}(x,y) = 0, \quad \forall y \in V. \tag{101.4}$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис V и $A_e = (a_{ij})$ – матрица билинейной формы $\mathcal{A}(x,y)$ в этом базисе. Соотношение (101.4) равносильно системе равенств $\mathcal{A}(x,e_j) = 0$, $j = \overline{1,n}$, или, если учесть разложение $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, системе равенств $\sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}(e_i,e_j) = 0$, $j = \overline{1,n}$, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{101.5}$$

Значит, билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ вырождена тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений (101.5) имеет нетривиальное решение, т.е. (теорема 28.5) когда $\operatorname{rg} A_e < n$. ■

Квадратичные формы. Пусть $\mathcal{A}(x,y)$ – симметричная билинейная форма в пространстве V над полем P. *Квадратичной формой* называется отображение $\mathcal{A} : V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x,x)$, т.е. *сужение симметричной билинейной формы на диагональ* (декартова квадрата $V \times V$). Обозначение: $\mathcal{A}(x,x)$ или $\mathcal{A}(x)$. Билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ при этом называется *полярной билинейной формой* к квадратичной форме $\mathcal{A}(x,x)$.

Теорема 101.6. *Полярная билинейная форма для любой квадратичной формы определена однозначно.*

Это утверждение вытекает из того, что если $\mathcal{A}(x,y)$ – полярная билинейная форма для квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$, то для любых $x, y \in V$

$$\mathcal{A}(x,y) = \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}(x+y,x+y) - \mathcal{A}(x,x) - \mathcal{A}(y,y)). \quad ■$$

Таким образом, полярная билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ однозначно восстанавливается по квадратичной форме $\mathcal{A}(x,x)$. Единственность

полярной билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ позволяет переносить ее характеристики на квадратичную форму $\mathcal{A}(x, x)$.

Матрицей квадратичной формы $\mathcal{A}(x, x)$ *в базисе* e называется матрица полярной к ней билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ в этом базисе.

Из свойств билинейной формы вытекают следующие свойства квадратичных форм.

1°. Матрица квадратичной формы симметрична.

2°. Существует взаимно однозначное соответствие между квадратичными формами в пространстве V и симметрическими матрицами из $P^{n\times n}$.

3°. Матрицы квадратичной формы в базисах e и $f = eQ$ связаны соотношением

$$A_f = Q^T A_e Q. \tag{101.6}$$

Матрицы A и B, связанные равенством $B = Q^T AQ$ для некоторой невырожденной матрицы Q, называются *конгруэнтными*. Нетрудно проверить, что отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности на множестве матриц одинакового порядка.

Таким образом, матрицы квадратичной формы $\mathcal{A}(x, y)$ в базисах e и f конгруэнтны, а если e и f – ортонормированные базисы, то эти матрицы подобны.

4°. В базисе e квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$ может быть записана в следующем виде: $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{101.7}$$

или, в компактной форме,

$$\mathcal{A}(x, x) = x_e^T A_e x_e, \quad A_e^T = A_e. \tag{101.8}$$

Представление квадратичной формы в виде (101.7) или (101.8) называется *общим видом квадратичной формы* $\mathcal{A}(x, x)$ *в базисе* e. Выражение $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$, называется *квадратичной формой от переменных* $x_1, \ldots, x_n$.

5°. *Рангом квадратичной формы* называется ранг ее матрицы в произвольном базисе. Очевидно, $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x) = \operatorname{rg} \mathcal{A}(x, y)$. Квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ называется *вырожденной*, если $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x) < \dim V$, и *невырожденной*, если $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x) = \dim V$.

Канонический вид квадратичной формы. Выбирая подходящим образом базис V, можно менять вид матрицы квадратичной формы и, следовательно, ее общий вид (101.7).

Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ называется *каноническим базисом квадратичной формы* $\mathcal{A}(x, x)$, если матрица квадратичной формы в этом базисе диагональна: $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

В каноническом базисе квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ согласно (101.7) имеет вид $\mathcal{A}(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, который называется *каноническим видом* квадратичной формы, а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – ее *каноническими коэффициентами*. Канонический вид называют также *суммой квадратов*. Очевидно, что число ненулевых квадратов совпадает с рангом $\mathcal{A}(x,x)$. Итак, если e – канонический базис и $r = \operatorname{rg}\mathcal{A}(x,x)$, то

$$\mathcal{A}(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2, \quad \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{101.9}$$

Теорема 101.7. *Для любой квадратичной формы существует канонический базис.*

Доказательство. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис V. Квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$ имеет в этом базисе вид (101.7). Обозначим $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

Покажем, что переходом к другому базису квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ приводится к каноническому виду. Переход к другому базису $f = eQ$ равносилен преобразованию координат по известному закону $x_e = Qx_f$, $|Q| \neq 0$. В терминах координат утверждение теоремы означает, что *любая квадратичная форма $g(x_1, \ldots, x_n)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ невырожденным преобразованием координат приводится к сумме квадратов*. Это мы и будем доказывать. Будем считать, что $A_e \neq O$ (если $A_e = O$, то e – искомый базис). Обозначим через Δ_k *угловые миноры* k-го порядка матрицы A_e, т.е. $\Delta_k = M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$, $k = \overline{1,n}$, и положим $\Delta_0 = 1$.

I. Рассмотрим сначала случай, когда $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,n-1}$. В этом случае процесс приведения к каноническому виду состоит из $n-1$ однотипных шагов.

Первый шаг основан на том, что $\Delta_1 \neq 0$, т.е. $a_{11} \neq 0$. Сгруппируем все члены квадратичной формы $g(x_1, \ldots, x_n)$, содержащие x_1, и выделим из них полный квадрат:

$$\mathcal{A}(x,x) = g(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2\textstyle\sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_1x_k + \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik}x_ix_k =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \textstyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} \dfrac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right)^2 + \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik}x_ix_k.$$

Перейдем к новым координатам:

$$x_1' = x_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k \quad \text{и} \quad x_j' = x_j \text{ при } j \neq 1,$$

очевидно выполнив при этом невырожденное преобразование координат с матрицей

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & \ldots & -a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{101.10}$$

Тогда квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ в новых координатах примет вид $\mathcal{A}(x,x) = a_{11}x_1'^2 + h(x_2', \ldots, x_n')$, где $h(x_2', \ldots, x_n')$ – квадратичная форма от переменных $x_2', \ldots, x_n'$. При этом матрица $A_1 = Q_1^T A_e Q_1$ квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в новом базисе будет иметь вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}' & \ldots & a_{2n}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}' & \ldots & a_{nn}' \end{bmatrix}.$$

Каждая строка (столбец) матрицы A_1, начиная со второй, получена из соответствующей строки (соответственно столбца) матрицы A_e вычитанием из нее первой строки (соответственно столбца) матрицы A_e, умноженной на некоторое число, поэтому угловые миноры матрицы A_1 совпадают с $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Следовательно, $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = a_{11}a_{22}'$ и

$$a_{22}' = \Delta_2/\Delta_1 \neq 0. \tag{101.11}$$

Второй шаг основан на том, что $\Delta_2 \neq 0$, т.е. $a_{22}' \neq 0$, и состоит в применении действий первого шага к квадратичной форме $h(x_2', \ldots, x_n')$: выделяется полный квадрат среди всех членов, содержащих x_2', выполняется невырожденное преобразование координат

$$x_2'' = x_2' + \sum_{k=3}^{n} \frac{a_{2k}'}{a_{22}'} x_k' \quad \text{и} \quad x_j'' = x_j' \text{ при } j \neq 2$$

и квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ приводится к виду $\mathcal{A}(x,x) = a_{11}x_1''^2 + a_{22}'x_2''^2 + v(x_3'', \ldots, x_n'')$, где $v(x_3'', \ldots, x_n'')$ – квадратичная форма от переменных $x_3'', \ldots, x_n''$, а ее матрица – к виду

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}' & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}'' & \ldots & a_{3n}'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}'' & \ldots & a_{nn}'' \end{bmatrix}.$$

По-прежнему угловые миноры матрицы A_2 совпадают с $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, поэтому

$$a_{33}'' = \Delta_3/\Delta_2 \neq 0. \tag{101.12}$$

Повторяя этот процесс, через $(n-1)$ шагов мы придем к базису, в котором матрица квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ имеет диагональную форму: $A_{n-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где с учетом (101.11), (101.12) и обозначения $\Delta_0 = 1$

$$\lambda_i = \Delta_i/\Delta_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{101.13}$$

Отметим, что каждый шаг (для определенности i-й шаг) процесса начинается с проверки условия $\Delta_i \neq 0$, так как только при выполнении этого условия можно провести i-й шаг.

Метод приведения к каноническому виду, описанный здесь, называется *методом Лагранжа*.

II. Пусть теперь среди угловых миноров $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ могут встретиться нулевые. Модифицируем метод Лагранжа.

Опишем i-й шаг. Пусть после $(i-1)$-го шага матрица квадратичной формы $A(x,x)$ имеет вид

$$A_{i-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & O \\ & \ddots & & \\ & & a_{i-1,i-1} & \\ O & & & \boxed{C} \end{bmatrix}, \text{ где } C = \begin{bmatrix} a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(здесь штрихи опущены для упрощения записи). Будем считать, что $C \neq O$ (равенство $C = O$ означает, что канонический базис уже построен).

1. Если $a_{ii} \neq 0$, то выполним i-й шаг метода Лагранжа.
2. Пусть $a_{ii} = 0$.

а) Если среди диагональных элементов матрицы C существует элемент $a_{jj} \neq 0$, $j > i$, то перенумеруем переменные (т.е. векторы базиса): $x'_i = x_j$, $x'_j = x_i$ и $x'_k = x_k$ при $k \neq i, j$. Тогда в матрице A_{i-1} поменяются местами строки (столбцы) с номерами i и j, поэтому в позиции (i,i) окажется ненулевой элемент $a'_{ii} = a_{jj}$, с помощью которого выполним i-й шаг метода Лагранжа.

б) Пусть все диагональные элементы матрицы C равны нулю, тогда в ней существует внедиагональный элемент $a_{kj} \neq 0$, $k, j \geq i$, $k \neq j$. Это означает, что в квадратичной форме от переменных $x_i, \dots, x_n$ отсутствуют квадраты $x_i^2, \dots, x_n^2$, но содержится член вида $2a_{kj}x_kx_j$. Перейдем к новым координатам, положив $x_k = x'_k + x'_j$, $x_j = x'_k - x'_j$ и $x'_s = x_s$ при $s \neq k, j$. Тогда квадратичная форма будет иметь квадраты $x_k'^2$, $x_j'^2$ и мы окажемся в ситуации "а". Отметим, что все преобразования координат были невырожденными. ■

Теорема 101.8. *Если в матрице квадратичной формы $A(x,x)$ ранга r первые r угловых миноров отличны от нуля: $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, то существует базис e, в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, где*

$$\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, \quad k = \overline{1,r}. \tag{101.14}$$

Доказательство. Напомним, что $\Delta_0 = 1$. Для квадратичной формы $A(x,x)$ в условиях теоремы выполнимы первые r шагов метода Лагранжа. После r-го шага матрица A_r квадратичной формы примет вид

$$A_r = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ O & & & \boxed{C} \end{bmatrix},$$

где, согласно (101.13), $\lambda_k = \Delta_k/\Delta_{k-1}$, $k = \overline{1,r}$, а C – некоторая матрица. Так как $\operatorname{rg} A_r = r$ и $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, то $\operatorname{rg} C = 0$ и $C = O$. Следовательно, матрица A_r имеет искомый вид. ■

Соотношения (101.14) называются *формулами Якоби*.

Замечание. Если в матрице квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в базисе e угловые миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ отличны от нуля, то можно провести $n-1$ шагов стандартного метода Лагранжа. На каждом шаге матрица перехода Q_i, $i = \overline{1,\, n-1}$, к новому базису согласно (101.10) имеет верхнюю треугольную форму, так что для последнего базиса f имеет место соотношение

$$f = eQ_1Q_2 \ldots Q_{n-1} = eQ,$$

где Q – верхняя треугольная матрица с единичными диагональными элементами. Таким образом, квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ *треугольным преобразованием* координат приводится к каноническому виду с каноническими коэффициентами

$$\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Теорема 101.9. *Квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ вырождена тогда и только тогда, когда существует вектор $x \neq \theta$ такой, что*

$$\mathcal{A}(x,x) = 0.$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 101.5 и канонического вида (101.9) квадратичной формы ранга $r < \dim V$. ■

§ 102. Квадратичные формы в вещественном пространстве

Ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определены однозначно. Например, любая перестановка векторов канонического базиса приводит вновь к каноническому базису.

Что общего у различных канонических видов одной и той же квадратичной формы? В (101.9) мы отмечали, что число ненулевых канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы и не зависит от выбора канонического базиса. В вещественном пространстве можно говорить и о знаках канонических коэффициентов.

Пусть квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ ранга r в вещественном пространстве V приведена к каноническому виду (101.9). Число π положительных квадратов в (101.9) и число $\nu = r - \pi$ называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции* квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$, их разность $\sigma = \pi - \nu$ называется *сигнатурой* $\mathcal{A}(x,x)$. Корректность определения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 102.1 (закон инерции). *Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной квадратичной формы не зависят от выбора канонического базиса.*

Доказательство. Пусть e и f – канонические базисы квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ ранга r и для $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{i=1}^{n}y_if_i$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x,x)&=a_1x_1^2+\ldots+a_px_p^2-a_{p+1}x_{p+1}^2-\ldots-a_rx_r^2,\\ \mathcal{A}(x,x)&=b_1y_1^2+\ldots+b_qy_q^2-b_{q+1}y_{q+1}^2-\ldots-b_ry_r^2,\end{aligned}\qquad(102.1)$$

где $a_i>0$, $b_i>0$, $i=\overline{1,r}$. Докажем, что $p\le q$. Пусть $p>q$. Рассмотрим подпространства $L_1=\mathcal{L}(e_1,\ldots,e_p)$, $L_2=\mathcal{L}(f_{q+1},\ldots,f_n)$. Согласно (65.2), $\dim L_1\cap L_2=p+(n-q)-\dim(L_1+L_2)$. Так как $\dim(L_1+L_2)\le n$, $p>q$, то $\dim L_1\cap L_2>0$. Следовательно, существует ненулевой вектор $x_0\in L_1\cap L_2$. Пусть $x_0=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_pe_p=\beta_{q+1}f_{q+1}+\ldots+\beta_nf_n$. Тогда согласно (102.1)

$$\mathcal{A}(x_0,x_0)=a_1\alpha_1^2+\ldots+a_p\alpha_p^2=-b_{q+1}\beta_{q+1}^2-\ldots-b_r\beta_r^2.\qquad(102.2)$$

Так как $x_0\ne\theta$, то $a_1\alpha_1^2+\ldots+a_p\alpha_p^2>0$, $-b_{q+1}\beta_{q+1}^2-\ldots-b_r\beta_r^2<0$. Это противоречит (102.2), и, значит, $p\le q$. Аналогично показывается, что $q\le p$. Следовательно, $p=q$. ■

Обозначим символами $P(\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_k)$ и $V(\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_k)$ число совпадений и перемен знаков в последовательности $\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_k$.

Теорема 102.2 (сигнатурное правило Якоби). *Пусть Δ_k – угловой минор k-го порядка матрицы квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ ранга r и $\Delta_k\ne0$, $k=\overline{1,r}$. Тогда*

$$\pi=P(\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_r),\quad \nu=V(\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_r),$$

где $\Delta_0=1$.

Утверждение теоремы вытекает из формул Якоби (101.14), так как $\lambda_i>0$, если $\operatorname{sgn}\Delta_i=\operatorname{sgn}\Delta_{i-1}$, и $\lambda_i<0$, если $\operatorname{sgn}\Delta_i\ne\operatorname{sgn}\Delta_{i-1}$. ■

Знакоопределенные квадратичные формы. Квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $\mathcal{A}(x,x)>0$ (соответственно $\mathcal{A}(x,x)<0$), $\forall x\ne\theta$. Такие формы называют *знакоопределенными* (или *знакопостоянными*). Квадратичные формы $\mathcal{A}(x,x)$, для которых $\mathcal{A}(x,x)\ge0$, $\forall x\in V$, или $\mathcal{A}(x,x)\le0$, $\forall x\in V$, называются *квазизнакопостоянными*. Квадратичные формы, для которых существуют векторы x и y такие, что $\mathcal{A}(x,x)>0$, $\mathcal{A}(y,y)<0$, называются *знакопеременными*.

Из (101.9) и (99.2) следует, что квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда в любом базисе пространства она имеет положительно определенную матрицу (это же, очевидно, относится ко всем знакоопределенным квадратичным формам).

Пример. Примером положительно определенной квадратичной формы в вещественном пространстве может служить скалярный квадрат в евклидовом пространстве, т.е. отображение $\mathcal{A}:E\to\mathbb{R}$, определенное равенством $\mathcal{A}(x)=(x,x)$, $\forall x\in E$. Это следует из того,

что скалярное произведение (x, y) является симметричной билинейной формой (в силу аксиом 1–3 из (68.1)), а скалярный квадрат – положительно определенной квадратичной формой (в силу аксиомы 4).

Теорема 102.3. *Квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда ее положительный (соответственно отрицательный) индекс инерции совпадает с размерностью пространства.*

Доказательство. Докажем сначала вариант теоремы, относящийся к положительно определенной форме. Пусть e – канонический базис квадратичной формы $\mathcal{A}(x, x)$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – ее канонические коэффициенты.

Необходимость. Если $\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\forall x \neq \theta$, то, в частности, $\mathcal{A}(e_i, e_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$. Но $\mathcal{A}(e_i, e_i) = \lambda_i$, следовательно, все канонические коэффициенты положительны и $\pi = n$.

Достаточность. Если $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, то, согласно (101.9),

$$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0, \ \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \neq \theta.$$

Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть квадратичную форму $-\mathcal{A}(x, x)$:

$$\mathcal{A}(x, x) < 0 \iff -\mathcal{A}(x, x) > 0 \iff \nu = \dim V. \ \blacksquare$$

Следствие. Определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы положителен, так как если e – канонический базис, то в произвольном базисе f, согласно (101.6), $|A_f| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \cdot |Q|^2 > 0$.

Теорема 102.4 (критерий Сильвестра). *Квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда угловые миноры Δ_k, $k = \overline{1, n}$, ее матрицы в произвольном базисе положительны (соответственно чередуют знаки, начиная с отрицательного):*

$$\Delta_k > 0, \ k = \overline{1, n} \quad (\Delta_k \Delta_{k-1} < 0, \ k = \overline{1, n}).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Необходимость. Пусть $\mathcal{A}(x, x)$ – положительно определенная квадратичная форма, A_e – ее матрица в произвольном базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Рассмотрим подпространства $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $k = \overline{1, n}$, и квадратичные формы $\mathcal{A}(x, x)$ на L_k. Очевидно, $\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\forall x \in L_k$, $x \neq \theta$, и, значит, ее матрица A_k в базисе $e_1, \ldots, e_k$ пространства L_k имеет положительный определитель $|A_k|$ (следствие из теоремы 102.3). Но $|A_k| = \Delta_k$, $k = \overline{1, n}$, следовательно, $\Delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$.

Достаточность вытекает из теорем 102.2 и 102.3.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим квадратичную форму $-\mathcal{A}(x, x)$ с угловыми минорами δ_k. Отрицательная определенность $\mathcal{A}(x, x)$ равносильна положительности формы $-\mathcal{A}(x, x)$, т.е. условию $\delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, или $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Так как $\Delta_0 = 1 > 0$, то это условие означает, что $\Delta_k \Delta_{k-1} < 0$, $k = \overline{1, n}$. $\blacksquare$

Общий вид скалярного произведения в вещественном пространстве. Как следует из примера положительно определенной квадратичной формы, скалярное произведение в евклидовом пространстве является билинейной формой, полярной к положительно определенной квадратичной форме. Оказывается, что такими билинейными формами исчерпываются все скалярные произведения в вещественном пространстве.

Теорема 102.5. *Пусть V – вещественное линейное пространство. Отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ есть скалярное произведение в пространстве V тогда и только тогда, когда оно является билинейной формой, полярной к положительно определенной квадратичной форме.*

Доказательство. Необходимость рассмотрена в примере.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – билинейная форма, полярная к положительно определенной квадратичной форме. Тогда отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$, определенное правилом

$$(x, y) = \mathcal{A}(x, y), \quad \forall x, y \in V, \tag{102.3}$$

является скалярным произведением, так как оно удовлетворяет всем аксиомам (68.1) скалярного произведения. ■

Представление (102.3), в котором $\mathcal{A}(x, y)$ – билинейная форма, полярная к положительно определенной квадратичной форме, называется *общим видом скалярного произведения в вещественном пространстве.*

Пользуясь общим видом (101.3) билинейной формы в базисе e, равенство (102.3) можно записать в виде

$$(x, y) = y_e^T A_e x_e, \quad \forall x, y \in V, \tag{102.4}$$

где A_e – положительно определенная матрица. Равенство (102.4) дает общий вид скалярного произведения в базисе e вещественного пространства.

Замечание. Матрица билинейной формы, задающей скалярное произведение, совпадает с матрицей Грама базисных векторов: $A_e = G(e_1, \ldots, e_n)$.

§ 103. Квадратичные формы в комплексном пространстве

В комплексном пространстве полным аналогом вещественных квадратичных форм являются так называемые эрмитовы квадратичные формы.

Полуторалинейные формы. Пусть V – комплексное линейное пространство. Отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если для любых $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

1) $\mathcal{A}(x+y,z)=\mathcal{A}(x,z)+\mathcal{A}(y,z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x,y)=\alpha\mathcal{A}(x,y)$;
3) $\mathcal{A}(x,y+z)=\mathcal{A}(x,y)+\mathcal{A}(x,z)$;
4) $\mathcal{A}(x,\alpha y)=\overline{\alpha}\mathcal{A}(x,y)$.

Полуторалинейную форму называют *эрмитовой*, если

$$\mathcal{A}(y,x)=\overline{\mathcal{A}(x,y)},\ \forall x,y\in V.$$

Примеры. 1. Скалярное произведение (x,y) в унитарном пространстве является эрмитовой полуторалинейной формой.

2. Примером полуторалинейной формы в n-мерном комплексном пространстве V с базисом $e_1,\dots,e_n$ может служить функция, определенная равенством: $\forall x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$

$$\mathcal{A}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\overline{y_j},\qquad(103.1)$$

где a_{ij} $(i,j=\overline{1,n})$ – фиксированные комплексные числа.

Для полуторалинейных форм имеют место все утверждения, касающиеся билинейных форм, при этом остаются в силе их доказательства. Незначительные изменения носят очевидный характер. В частности:

– *общий вид полуторалинейной формы* в базисе $e=(e_1,\dots,e_n)$ определен равенством (103.1), или, в компактной форме,

$$\mathcal{A}(x,y)=x_e^TA_e\bar{y}_e\quad\text{или}\quad\mathcal{A}(x,y)=y_e^HA_e^Tx_e;$$

– если e и $f=eQ$ – два базиса пространства, то

$$A_f=Q^TA_e\bar{Q};$$

– полуторалинейная форма эрмитова тогда и только тогда, когда ее матрица в любом базисе эрмитова.

Теорема 103.1. *Полуторалинейная форма эрмитова тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}(x,x)\in\mathbb{R}$, $\forall x\in V$.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как

$$\mathcal{A}(x,x)=\overline{\mathcal{A}(x,x)},\ \forall x\in V.$$

Достаточность вытекает из равенства

$$\mathcal{A}(x,y)=\tfrac{1}{4}\big(\mathcal{A}(x+y,x+y)-\mathcal{A}(x-y,x-y)+$$
$$+i\mathcal{A}(x+iy,x+iy)-i\mathcal{A}(x-iy,x-iy)\big),\ \forall x,y\in V,\qquad(103.2)$$

которое справедливо для любой полуторалинейной формы $\mathcal{A}(x,y)$. ■

Эрмитовы формы. Пусть $\mathcal{A}(x,y)$ – эрмитова полуторалинейная форма в комплексном пространстве V. *Эрмитовой квадратичной формой* (или, короче, *эрмитовой формой*) называется отображение

$\mathcal{A}: V \to \mathbb{C}$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x,x)$. Полуторалинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ при этом называется *полярной полуторалинейной формой* к эрмитовой форме $\mathcal{A}(x,x)$.

Эрмитова квадратичная форма обладает всеми свойствами (с очевидными изменениями) обычных квадратичных форм (§101). Отметим некоторые из них.

1. Полуторалинейная форма, полярная к эрмитовой форме, определена однозначно.

Действительно,

$$\mathcal{A}(x+y,\, x+y) = \mathcal{A}(x,x) + \mathcal{A}(y,y) + \mathcal{A}(x,y) + \overline{\mathcal{A}(x,y)},$$
$$\mathcal{A}(x+iy,\, x+iy) = \mathcal{A}(x,x) + \mathcal{A}(y,y) - i\mathcal{A}(x,y) + i\,\overline{\mathcal{A}(x,y)}$$

и так как $\mathcal{A}(x,x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$, то

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\mathcal{A}(x+y,\, x+y) - \mathcal{A}(x,x) - \mathcal{A}(y,y)) = \operatorname{Re}\mathcal{A}(x,y), \\ &\tfrac{1}{2}(\mathcal{A}(x+iy,\, x+iy) - \mathcal{A}(x,x) - \mathcal{A}(y,y)) = \operatorname{Im}\mathcal{A}(x,y). \end{aligned} \tag{103.3}$$

2. Матрица эрмитовой квадратичной формы в любом базисе эрмитова: $A_e^H = A_e$ (или $A_e^T = \bar{A}_e$). Отсюда следует, что:

а) $\det A_e \in \mathbb{R}$;

б) все угловые миноры Δ_k матрицы A_e действительны: $\Delta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$;

в) все канонические коэффициенты $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$ (так как $\lambda_k = \mathcal{A}(e_k, e_k)$).

3. Общий вид эрмитовой квадратичной формы: $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{x_j}, \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}} \ \ (i,j = \overline{1,n}),$$

или, в компактной форме,

$$\mathcal{A}(x,x) = x_e^T A_e \overline{x_e} = x_e^H A_e^T x_e = x_e^H \bar{A}_e x_e, \text{ где } A_e^H = A_e.$$

4. Если e и $f = eQ$ – два базиса пространства, то

$$A_f = Q^T A_e \bar{Q}.$$

Комплексные матрицы A и B называются *эрмитово конгруэнтными*, если они связаны соотношением $B = Q^T A \bar{Q}$ для некоторой невырожденной матрицы Q.

Таким образом, матрицы A_f и A_e эрмитово конгруэнтны.

5. Канонический вид эрмитовой квадратичной формы:

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{k=1}^r \lambda_k |x_k|^2, \quad \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

где $r = \operatorname{rg}\mathcal{A}(x,x)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,r})$.

6. Метод Лагранжа приведения к каноническому виду применим и для эрмитовой формы. Изменение алгоритма, описанного в доказательстве теоремы 101.7, состоит лишь в том, что на каждом шаге

выделяется полный квадрат модуля (например, на первом шаге: $f(x_1,\dots,x_n) = a_{11}\left|x_1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right|^2 + g(x_2,\dots,x_n)$).

7. Остаются справедливыми и формулы Якоби (101.14).

8. Как следует из теоремы 103.1, эрмитова квадратичная форма принимает только вещественные значения. Это свойство сближает ее с вещественной квадратичной формой (§102). В частности, для эрмитовых квадратичных форм справедливы закон инерции, сигнатурное правило Якоби, критерий Сильвестра. Практически без изменения остаются и доказательства этих фактов.

9. Наконец, отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{C}$ есть скалярное произведение в комплексном пространстве V тогда и только тогда, когда оно является полуторалинейной формой, полярной к положительно определенной эрмитовой форме.

Это утверждение определяет *общий вид скалярного произведения в комплексном пространстве*:

$$(x, y) = \mathcal{A}(x, y), \quad \forall x, y \in V,$$

где $\mathcal{A}(x, y)$ – полуторалинейная форма, полярная к положительно определенной эрмитовой форме, или

$$(x, y) = x_e^T A_e \bar{y}_e, \quad \forall x, y \in V,$$

где A_e – положительно определенная матрица.

§ 104. Квадратичные формы в евклидовом (унитарном) пространстве

Мы отмечали (§102), что ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определены однозначно; однозначно лишь число всех ненулевых квадратов (в произвольном линейном пространстве) и число положительных и отрицательных квадратов (в вещественном и комплексном пространстве). В евклидовом пространстве (в унитарном пространстве для эрмитовых квадратичных форм) положение иное, если рассматривать ортонормированные базисы.

Теорема 104.1. *Для любой квадратичной формы в евклидовом (и унитарном) пространстве V существует ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид.*

Доказательство. Пусть V – евклидово пространство, e – ортонормированный базис V, A_e – матрица квадратичной формы $\mathcal{A}(x, y)$ в базисе e. Тогда $\mathcal{A}(x, x) = x_e^T A_e x_e$, где A_e – симметрическая матрица. Известно (§93), что симметрическая матрица ортогонально подобна диагональной матрице $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, так что

$$\Lambda = Q^T A_e Q, \tag{104.1}$$

где Q – ортогональная матрица. Это означает, что в ортонормированием базисе $f = eQ$ матрица $A_f = \Lambda$ – диагональна, а квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \quad \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i. \tag{104.2}$$

Если V – унитарное пространство и e – ортонормированный базис V, то $\mathcal{A}(x, x) = x_e^H \bar{A}_e x_e$, где A_e (следовательно, и $\bar{A}_e$) – эрмитова матрица. Известно (§93), что эрмитова матрица унитарно подобна вещественной диагональной матрице $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, так что

$$\Lambda = Q^H \bar{A}_e Q = Q^T A_e \bar{Q}, \tag{104.3}$$

где Q – унитарная матрица. Это означает, что в ортонормированном базисе $f = eQ$ матрица $A_f = \Lambda$ – диагональна, а квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2, \quad \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i. \quad \blacksquare \tag{104.4}$$

Операция построения ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется *приведением квадратичной формы к главным осям*. Из теоремы 104.1 следует, что *любая квадратичная форма приводится к главным осям.*

Теорема 104.2. *Канонические коэффициенты квадратичной формы, приведенной к главным осям, определены однозначно.*

Доказательство. Действительно, соотношения (104.1) и (104.3) говорят о том, что канонические коэффициенты являются собственными значениями матрицы A_e (или $\bar{A}_e$ в комплексном случае) квадратичной формы в ортонормированном базисе e и не зависят от выбора базиса e, так как все матрицы квадратичной формы в ортонормированных базисах подобны и, следовательно, имеют одинаковые собственные значения. ■

Что же касается канонического базиса, то он состоит (как следует из (104.1), (104.3)) из ортонормированной системы собственных векторов матрицы A_e (или $\bar{A}_e$) и определен с той же степенью произвола, с какой определена полная ортонормированная система из собственных векторов матрицы.

Теорема 104.3. *Для любой квадратичной формы $\mathcal{A}(x, x)$ в евклидовом (и унитарном) пространстве V существует, и притом единственный, симметрический (соответственно эрмитов) оператор $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(V, V)$ такой, что*

$$\mathcal{A}(x, x) = (\mathcal{H}x, x). \tag{104.5}$$

Доказательство. Существование. Если e – ортонормированный базис V и A_e – матрица квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в базисе e, то $\mathcal{A}(x,x) = x_e^T A_e x_e$ (соответственно $\mathcal{A}(x,x) = x_e^H \bar{A}_e x_e$) или в соответствии с (99.2) $\mathcal{A}(x,x) = (A_e x_e, x_e)$ (соответственно $\mathcal{A}(x,x) = (\bar{A}_e x_e, x_e)$).

Если $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(V,V)$ – линейный оператор, имеющий в базисе e матрицу A_e (соответственно $\bar{A}_e$), то $\mathcal{A}(x,x) = (\mathcal{H}x, x)$, $\forall x \in V$. Так как A_e (и $\bar{A}_e$) – самосопряженная матрица, e – ортонормированный базис, то $\mathcal{H}$ – самосопряженный оператор.

Единственность. Если $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – самосопряженные операторы, удовлетворяющие (104.1), то $(\mathcal{H}_1 x, x) = (\mathcal{H}_2 x, x)$, $\forall x \in V$, или

$$((\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)x, x) = 0, \quad \forall x \in V. \tag{104.6}$$

Оператор $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ самосопряжен, для него существует ортонормированный базис из собственных векторов, а все собственные значения в силу (104.6) равны нулю. Следовательно, $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = \mathcal{O}$. ■

Теорема 104.4 (о паре квадратичных форм). *Для любой пары квадратичных форм $\mathcal{A}(x,x)$ и $\mathcal{B}(x,x)$ в вещественном (и комплексном) пространстве V, одна из которых положительно определена, существует общий базис, в котором обе квадратичные формы имеют канонический вид.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(x,x) > 0$ и $\mathcal{B}(x,y)$ – билинейная (соответственно полуторалинейная) форма, полярная к квадратичной форме $\mathcal{B}(x,x)$. В соответствии с теоремой 102.5 введем скалярное произведение (102.3). Тогда пространство V станет евклидовым (соответственно унитарным) и в нем согласно теореме 104.1 существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ имеет канонический вид, при этом в силу (70.7): для любого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\mathcal{B}(x,x) = (x,x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2. \quad ■ \tag{104.7}$$

Замечание. Один из способов поиска общего базиса $e_1, \ldots, e_n$, в котором формы $\mathcal{A}(x,x)$ и $\mathcal{B}(x,x)$ имеют канонический вид, состоит в следующем.

Пусть A и B – матрицы квадратичных форм $\mathcal{A}(x,x)$ и $\mathcal{B}(x,x)$ в некотором базисе f и пусть $e = fQ$. Тогда $Q^T A Q = \Lambda$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, и $Q^T B Q = I$. Следовательно, $A = (Q^T)^{-1} \Lambda Q^{-1}$, $B = (Q^T)^{-1} Q^{-1}$, $B^{-1} = QQ^T$, $B^{-1}A = Q\Lambda Q^{-1}$ и $B^{-1}AQ = Q\Lambda$. Последнее равенство означает, что столбцы матрицы Q (т.е. координаты векторов искомого канонического базиса e в исходном базисе f) являются собственными векторами матрицы $B^{-1}A$, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, канонические коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями уравнения $|B^{-1}A - \lambda I| = 0$ или, в равносильной записи, уравнения

$$|A - \lambda B| = 0, \tag{104.8}$$

а векторы канонического базиса – нетривиальными решениями однородной системы уравнений

$$Ax = \lambda Bx. \tag{104.9}$$

Теорема 104.4 обеспечивает существование полного набора вещественных корней уравнения (104.8) и для каждого кратного корня – наличие соответствующего

числа линейно независимых решений системы (104.9). Вообще говоря, описанный алгоритм (как и доказательство теоремы 104.4) решает поставленную задачу в усиленном варианте: положительно определенная форма $B(x,x)$ приводится к каноническому виду с коэффициентами, равными 1. В действительности это не требуется: без существенных изменений приведенный здесь алгоритм применим и для случая, когда $Q^TBQ = \operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$. Таким образом, коэффициенты преобразуемых форм не определяются однозначно. Однако, как легко показать, *отношения λ_i/μ_i канонических коэффициентов не зависят от способа одновременного приведения форм $A(x,x)$ и $B(x,x)$ к каноническому виду.*

В вычислительной алгебре задачу (104.9) называют *обобщенной проблемой собственных значений.*

Глава XVIII. Геометрия квадратичных форм и поверхности второго порядка

§ 105. Гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве

Общее уравнение. Пусть $\mathcal{A}(x,x)$ – ненулевая квадратичная форма, $g(x)$ – линейная форма, заданные в евклидовом пространстве E, и c – вещественная константа. Множество всех векторов $x \in E$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{A}(x,x) + 2g(x) + c = 0, \tag{105.1}$$

называется *гиперповерхностью второго порядка в евклидовом пространстве* E[1]. Уравнение (105.1) называется *общим уравнением гиперповерхности второго порядка.*

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис пространства E, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в этом базисе, $b_i = g(e_i)$, $i = \overline{1,n}$, – коэффициенты линейной формы и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда в соответствии с (101.7), (81.1) общее уравнение (105.1) может быть записано в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{105.2}$$

или, в компактной форме,

$$X^T A X + 2b^T X + c = 0, \quad A = A^T, \tag{105.3}$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$.

Приведенные уравнения. Исследование гиперповерхности второго порядка в n-мерном пространстве проводится по той же схеме, по которой исследуются линии второго порядка на плоскости (§58, 59). Отметим основные моменты этого исследования с общих позиций.

Пусть e – ортонормированный базис E и пусть в этом базисе уравнение гиперповерхности имеет вид (105.2).

1. Приведем квадратичную форму $\mathcal{A}(x,x)$ к главным осям, т.е. найдем ортонормированный базис f, в котором квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ имеет канонический вид. Отметим, что канонические коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ будут при этом определены однозначно (теорема 104.2). Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\lambda_k \neq 0$ при $k \leq r$ (где $r = \operatorname{rg}\mathcal{A}(x,x)$) и $\lambda_k = 0$ при $k > r$.

[1] В случае, когда $\dim E = 2$, геометрический образ, определяемый уравнением (105.1), называется линией второго порядка. Однако всюду в дальнейшем мы употребляем общий термин "поверхность", не оговаривая особо этот случай.

При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ уравнение (105.2) ортогональным преобразованием координат (теорема 70.5) преобразуется в уравнение

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k'^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k' x_k' + c = 0. \tag{105.4}$$

2. Пусть $a \in E$. Отображение $\varphi : E \to E$, определенное равенством $\varphi(x) = x + a$, $\forall x \in E$, называется *параллельным переносом пространства E на вектор a*. Очевидно, $\operatorname{im}\varphi = E$.

Если в уравнении (105.4) $\lambda_k \neq 0$ для некоторого k, то $\lambda_k x_k'^2 + 2b_k' x_k' = \lambda_k(x_k' + b_k'/\lambda_k)^2 - b_k'^2/\lambda_k$. Положив $x_k'' = x_k' + b_k'/\lambda_k$, можно избавиться от переменной x_k'' в первой степени. Выполнение таких преобразований для всех $k = \overline{1,r}$ равносильно параллельному переносу на вектор с координатами $(b_1'/\lambda_1, \ldots, b_r'/\lambda_r, 0, \ldots, 0)$. В результате этого переноса уравнение (105.4) преобразуется в уравнение

$$\lambda_1 x_1''^2 + \cdots + \lambda_r x_r''^2 + 2\sum_{k=r+1}^{n} b_k' x_k'' + c' = 0, \tag{105.5}$$

где $c' = c - \sum_{k=1}^{r} b_k'^2/\lambda_k$.

3. Исследуем уравнение (105.5). Возможны два случая:

а) $b_{r+1}' = \cdots = b_n' = 0$;

б) $\exists b_k' \neq 0$, $k > r$.

В случае "а" уравнение (105.5) имеет вид

$$\lambda_1 x_1''^2 + \cdots + \lambda_r x_r''^2 + c' = 0.$$

В случае "б" выполним еще одно ортогональное преобразование координат. Матрица S этого преобразования строится следующим образом. Рассмотрим арифметический вектор $(b_{r+1}', \ldots, b_n') \in \mathbb{R}^{n-r}$. По условию он ненулевой и его можно нормировать: если $\alpha = \left(\sum_{k=r+1}^{n} b_k'^2\right)^{1/2}$, то вектор $s_1 = (b_{r+1}'/\alpha, \ldots, b_n'/\alpha)$ представляет собой ортонормированную систему из одного вектора. Дополним этот вектор до ортонормированного базиса $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$ пространства $\mathbb{R}^{n-r}$. В обозначениях $s_i = (s_{i,r+1}, \ldots, s_{in})$, $i = \overline{1, n-r}$, искомая матрица S имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & s_{1,r+1} & \cdots & s_{1n} \\ & O & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & s_{n-r,r+1} & \cdots & s_{n-r,n} \end{bmatrix}$$

Матрица S ортогональна (так как ее строки ортонормированы), поэтому преобразование базиса с помощью матрицы перехода S приводит к новому ортонормированному базису. При этом преобразование координат осуществляется по закону $x_k''' = x_k''$ при $k = \overline{1,r}$, $x_{r+1}''' = \alpha^{-1}\sum_{k=r+1}^{n} b_k' x_k''$, $x_k''' = \sum_{i=r+1}^{n} s_{ki} x_i''$ при $k = \overline{r+2,n}$, и приводит уравнение (105.5) к виду $\lambda_1 x_1'''^2 + \dots + \lambda_r x_r'''^2 + 2\alpha x_{r+1}''' + c' = 0$. В последнем уравнении можно освободиться от свободного члена c', если выполнить параллельный перенос на вектор, у которого все координаты, кроме $(r+1)$-й (равной $c'/(2\alpha)$), равны нулю.

Итак, с помощью параллельного переноса и перехода к новому ортонормированному базису общее уравнение (105.2) приводится к одному из двух типов уравнений:

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0, \tag{105.6}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + b_0 x_{r+1} = 0, \quad \lambda_1 \dots \lambda_r b_0 \neq 0, \tag{105.7}$$

которые принято называть *приведенными уравнениями гиперповерхности.*

Инварианты гиперповерхности. Величины и функции, определяемые коэффициентами общего уравнения (105.2), которые не изменяются при преобразованиях координат, называются *инвариантами гиперповерхности относительно этих преобразований.*

Аппарат инвариантов (как и в случае линий второго порядка на плоскости) позволяет по общему уравнению однозначно найти тип приведенного уравнения и все его коэффициенты.

Рассмотрим матрицу

$$B = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^T & c \end{array}\right], \tag{105.8}$$

полученную окаймлением матрицы A квадратичной формы столбцом и строкой из коэффициентов линейной формы и свободным членом c.

Теорема 105.1. *Характеристические многочлены матриц A и B являются инвариантами гиперповерхности относительно ортогонального преобразования координат.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того, что соотношения $A_f = Q^T A_e Q$ и $B_f = \widetilde{Q}^T B_e \widetilde{Q}$ (см. доказательство теоремы 58.2) в случае ортогональности Q означают подобие матриц A_e и A_f, B_e и B_f, а следовательно, и совпадение характеристических многочленов (теорема 86.2). ■

Следствие. Инвариантами гиперповерхности относительно ортогонального преобразования координат являются:

а) канонические коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (как корни характеристического многочлена матрицы A);

б) суммы главных миноров k-го порядка матрицы A, $k = \overline{1,n}$, и, в частности, $\operatorname{tr} A$, $\det A$ (как коэффициенты характеристического многочлена);

в) числа $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rg} B$.

Теорема 105.2. *Канонические коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и величины* $\operatorname{tr} A$, $\det A$, $\det B$, $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rg} B$ *являются инвариантами гиперповерхности относительно параллельного переноса.*

Доказательство. Инвариантность канонических коэффициентов и величин $\operatorname{tr} A$, $\det A$, $\operatorname{rg} A$ следует из того, что при параллельном переносе матрица A не изменяется, а инвариантность $\det B$, $\operatorname{rg} B$ – из того, что матрица B при параллельном переносе подвергается элементарным преобразованиям (см. доказательство теоремы 58.3). ■

Теорема 105.3. *Общее уравнение гиперповерхности второго порядка ортогональным преобразованием координат и параллельным переносом приводится к одному и только одному из типов приведенных уравнений.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что для уравнений типа (105.6) выполняется неравенство $\operatorname{rg} B \le \operatorname{rg} A + 1$, а для (105.7) – равенство $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A + 2$. ■

Классификация гиперповерхностей. Классификация осуществляется на основе приведенных уравнений (105.6) и (105.7).

1. Пусть $r = n$. Тогда уравнение (105.2) приводится только к уравнению типа (105.6), которое в этом случае имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + a_0 = 0, \tag{105.9}$$

при этом $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$, $\det B = \lambda_1 \dots \lambda_n a_0$, $a_0 = \det B / \det A$. Все коэффициенты в (105.9) определены однозначно вследствие инвариантности чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\det A$, $\det B$. В силу закона инерции (теорема 102.1) число положительных и число отрицательных коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно, так что уравнение (105.9) однозначно преобразуется в уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1, \tag{105.10}$$

если $\det B \ne 0$; а в случае, когда $\det B = 0$, – в уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0. \tag{105.11}$$

Гиперповерхность, определяемая уравнением (105.10), при $k = n$ называется *эллипсоидом*, при $k = 0$ – *мнимым эллипсоидом*, при $0 < k < n$ – *гиперболоидом*. Гиперповерхность, определяемая уравнением (105.11), называется *конусом*.

2. Пусть $r = n-1$. Тогда уравнение (105.2) приводится к уравнению типа (105.6), если $\det B = 0$, и к уравнению (105.7), если $\det B \ne 0$. Эти уравнения однозначно преобразуются:

в первом случае в уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\cdots-\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=c, \tag{105.12}$$

где $c=1$, если $\operatorname{rg} B=n$, и $c=0$, если $\operatorname{rg} B=n-1$;

во втором случае в уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\cdots-\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=2px_n, \quad p>0. \tag{105.13}$$

Гиперповерхность, определяемая уравнением (105.13), называется *параболоидом.*

3. Пусть $0<r<n-1$. Тогда уравнение (105.2) приводится к уравнению типа (105.6), если $\operatorname{rg} B\le r+1$, и к уравнению типа (105.7), если $\operatorname{rg} B=r+2$. Эти уравнения однозначно преобразуются:

в первом случае в уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\cdots-\frac{x_r^2}{a_r^2}=c, \tag{105.14}$$

где $c=1$, если $\operatorname{rg} B=r+1$, и $c=0$, если $\operatorname{rg} B=r$;

во втором случае в уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\cdots-\frac{x_r^2}{a_r^2}=2px_{r+1}, \quad p>0. \tag{105.15}$$

Гиперповерхности, определяемые уравнениями (105.12), (105.14), (105.15), называются *цилиндрами.*

Так как условия, определяющие эти уравнения, взаимно исключают друг друга, то *общее уравнение* (105.2) *определяет одну и только одну из перечисленных поверхностей.*

§ 106. Алгебраические поверхности второго порядка

Общее уравнение. Под общим уравнением алгебраической поверхности второго порядка в системе координат $Oxyz$ пространства понимают уравнение вида

$$\begin{aligned}a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\\+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0,\end{aligned} \tag{106.1}$$

где не все коэффициенты a_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$ равны нулю, $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=\overline{1,3})$. Здесь группа членов второго порядка образует квадратичную форму от переменных x,y,z (или, в векторной терминологии, от

радиус-вектора точки (x, y, z)), а группа линейных членов – линейную форму, так что уравнение (106.1) является уравнением гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве V_3. Обозначения, соответствующие общей теории гиперповерхностей, в данном случае имеют вид:

$$X = (x, y, z)^T, \quad b = (b_1, b_2, b_3)^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях общее уравнение (106.1) может быть записано в компактной форме:

$$X^T A X + 2b^T X + c = 0, \quad A = A^T. \tag{106.2}$$

Приведенные уравнения. Пусть общее уравнение (106.1) задано в прямоугольной декартовой системе координат. Согласно общей теории гиперповерхностей (§105) уравнение (106.1) с помощью ортогонального преобразования координат (т.е. простым вращением и простым отражением) и параллельного переноса (т.е. переноса начала) приводится к одному и только одному из двух типов приведенных уравнений (105.6) и (105.7). В соответствии с общей схемой классификации гиперповерхностей эти уравнения можно разбить на следующие пять простейших уравнений в зависимости от значения $r = \operatorname{rg} A$.

1. При $r = 3$:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0. \tag{106.3}$$

2. При $r = 2$:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_0 z = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 b_0 \neq 0 \tag{106.4}$$

или

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c_0 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0. \tag{106.5}$$

3. При $r = 1$:

$$\lambda_1 x^2 + 2p_0 y = 0, \quad \lambda_1 p_0 \neq 0 \tag{106.6}$$

или

$$\lambda_1 x^2 + q_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0. \tag{106.7}$$

Отметим, что все коэффициенты уравнений (106.3)–(106.7) определены однозначно общими инвариантами гиперповерхностей: $I_1 = \operatorname{tr} A$, $I_3 = \det A$, $K_4 = \det B$ и специальными инвариантами алгебраической поверхности второго порядка: I_2 – сумма главных миноров второго порядка матрицы A; K_2 и K_3 – суммы главных миноров второго и третьего порядков матрицы B.

Величины I_2, K_2, K_3 – инварианты ортогонального преобразования координат, так как являются коэффициентами характеристических многочленов матриц A, B (докажите!). Однако при параллельном переносе величина K_3 остается неизменной, только если $I_2 = I_3 = K_4 = 0$, а величина K_2 – если $I_2 = I_3 = K_3 = K_4 = 0$. В этом несложно убедиться непосредственно аналогично тому, как это было сделано для линии второго порядка (теорема 58.2).

Для уравнений (106.3)–(106.7) легко вычислить все инварианты, а именно:

(106.3): $I_3 \neq 0$;
(106.4): $I_3 = 0$, $K_4 \neq 0$;
(106.5): $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 \neq 0$;
(106.6): $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$;
(106.7): $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, $I_1 \neq 0$.

Эти условия необходимы и достаточны для каждого из перечисленных уравнений, так как взаимно исключают друг друга. При этом все коэффициенты уравнений определены однозначно, ибо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического уравнения: $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$;

$$a_0 = \frac{K_4}{I_3};\ b_0 = \left(-\frac{K_4}{I_2}\right)^{1/2};\ c_0 = \frac{K_3}{I_2};\ p_0 = \left(-\frac{K_3}{I_1}\right)^{1/2};\ q_0 = \frac{K_2}{I_1}.$$

Метод вращений. Упрощение общего уравнения алгебраической поверхности второго порядка, проведенное здесь, опиралось на общую теорию гиперповерхностей второго порядка, в основе которой лежит приведение квадратичной формы

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (106.8)$$

к главным осям. Как следует из теоремы 104.1, каноническими коэффициентами при этом будут собственные значения матрицы квадратичной формы, а каноническим базисом – ортонормированная система собственных значений.

Один из способов приведения квадратичной формы f к главным осям (как и в случае алгебраической линии второго порядка на плоскости) основан на поворотах системы координат.

Рассмотрим единичную сферу S, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Такое рассмотрение мотивировано экстремальными свойствами квадратичной формы на единичной сфере, о которых пойдет речь в §112 (см. Замечание).

Функция f определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве S и, следовательно, достигает на этом множестве своего максимального значения ([11]). Пусть P – точка максимума функции f на сфере S.

Выполним поворот системы координат $Oxyz$ вокруг точки O так, чтобы ось Oz' совпала с прямой OP, а положительное направление оси – с направлением вектора $\overrightarrow{OP}$. Получим новую прямоугольную

декартову систему координат $Ox'y'z'$, в которой функция f имеет вид

$$f = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z', \quad (106.9)$$

сфера S определяется уравнением $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, а точка P имеет координаты $(0, 0, 1)$.

Согласно выбору системы координат $Ox'y'z'$, максимальное значение функции f достигается при $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 1$. Если в (106.9) положить $y' = 0$, $z' = 1$, то получится функция f_1 от одной переменной x':

$$f_1 = a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + a_{33},$$

которая достигает максимального значения в точке P, т.е. при $x' = 0$. Следовательно,

$$\left.\frac{df_1}{dx'}\right|_{x'=0} = 0,$$

откуда $a'_{13} = 0$. Аналогично, если в f_1 положить $x' = 0$, $z' = 1$, то получим, что $a'_{23} = 0$. Таким образом, в системе координат $Ox'y'z'$ функция f_1 имеет вид

$$f_1 = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}z'^2 + a'_{33}z'^2. \quad (106.10)$$

При повороте системы координат $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' на угол φ координаты x', y', z' преобразуются по формулам

$$\begin{cases} x' = x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi, \\ y' = x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi, \\ z' = z'', \end{cases}$$

при этом функция f' по-прежнему будет иметь вид (106.10), а выбором угла φ, для которого $\operatorname{ctg} 2\varphi = (a'_{11} - a'_{22})/(2a'_{12})$ (как и при рассмотрении линии второго порядка на плоскости), можно добиться того, чтобы коэффициент a''_{12} при $x''y''$ стал равным нулю.

Таким образом, с помощью двух поворотов системы координат $Oxyz$ можно найти систему координат $Ox''y''z''$, в которой группа старших членов общего уравнения (106.1) не содержит произведений $x''y''$, $x''z''$, $y''z''$.

Метод, изложенный здесь, называют *методом вращений приведения квадратичной формы* (106.8) *от трех переменных к главным осям.*

Замечание. Идеи этого метода лежат в основе метода вращений нахождения собственных значений и ортонормированной системы собственных векторов симметрической матрицы n-го порядка, эффективно используемого в вычислительной математике.

Канонические уравнения.

Теорема 106.1. *Для любой алгебраической поверхности второго порядка существует прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих видов:*

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *эллипсоид;*

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – *мнимый эллипсоид;*

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – *вырожденный эллипсоид;*

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *однополостный гиперболоид;*

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – *двуполостный гиперболоид;*

6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – *конус;*

7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ – *эллиптический параболоид;*

8) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ – *гиперболический параболоид;*

9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *эллиптический цилиндр;*

10) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – *мнимый эллиптический цилиндр;*

11) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *гиперболический цилиндр;*

12) $y^2=2px$ $(p>0)$ – *параболический цилиндр;*

13) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – *пара пересекающихся плоскостей;*

14) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – *пара мнимых пересекающихся плоскостей;*

15) $y^2 = a^2$ $(a > 0)$ – *пара параллельных плоскостей;*

16) $y^2 = -a^2$ $(a > 0)$ – *пара мнимых параллельных плоскостей;*

17) $y^2 = 0$ – *пара совпадающих плоскостей.*

Доказательство. Будем исходить из уравнений (106.3)–(106.7). Рассмотрим уравнение (106.3). В зависимости от сочетаний знаков λ_1, λ_2, λ_3, a_0 оно может быть записано по-разному.

1. Пусть знаки чисел λ_1, λ_2, λ_3 совпадают. При этом:

а) если $a_0\lambda_1 < 0$, то уравнение (106.3) может быть записано как уравнение 1, где $a^2 = -a_0/\lambda_1$, $b^2 = -a_0/\lambda_2$, $c^2 = -a_0/\lambda_3$;

б) если $a_0\lambda_1 > 0$ – как уравнение 2;

в) если $a_0 = 0$ – как уравнение 3.

2. Пусть знаки чисел λ_1, λ_2, λ_3 не совпадают. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$. При этом уравнение (106.3) может быть записано как уравнение 4 (если $a_0\lambda_3 > 0$), как уравнение 5 (если $a_0\lambda_3 < 0$) и как уравнение 6 (если $a_0 = 0$).

Аналогично уравнение (106.4) в зависимости от знаков λ_1, λ_2 может быть записано (после возможных перенумераций неизвестных и изменения направления одной из осей координат) как уравнение 7 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0$) и как уравнение 8 (если $\lambda_1\lambda_2 < 0$).

Уравнение (106.5) может быть записано как уравнение 9 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $c_0\lambda_1 < 0$), как уравнение 10 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $c_0\lambda_1 > 0$), как уравнение 14 (если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $c_0 = 0$), как уравнение 11 (если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $c_0 \neq 0$) и как уравнение 13 (если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $c_0 = 0$).

Уравнение (106.6) после стандартных преобразований может быть записано как уравнение 12.

Уравнение (106.7) может быть записано как уравнение 15 (если $q_0\lambda_1 < 0$), как уравнение 16 (если $q_0\lambda_1 > 0$) и как уравнение 17 (если $q_0 = 0$).

Таким образом, уравнениями 1–17 исчерпываются все поверхности второго порядка. ■

Уравнения 1–17 называются *каноническими уравнениями алгебраических поверхностей второго порядка.*

Геометрические свойства. Канонические уравнения позволяют исследовать геометрические свойства поверхностей. Чтобы представить форму поверхности, проще всего изучить ее сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Эллипсоид (рис. 1). Поверхность, определяемая уравнением 1, называется *эллипсоидом.* Числа a, b, c в каноническом уравнении называются *полуосями* эллипсоида. Как следует из уравнения, координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии эллипсоида. Эллипсоид – ограниченная поверхность, заключенная в параллелепипеде $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$.

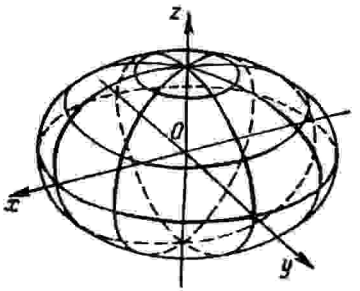


Рис. 1

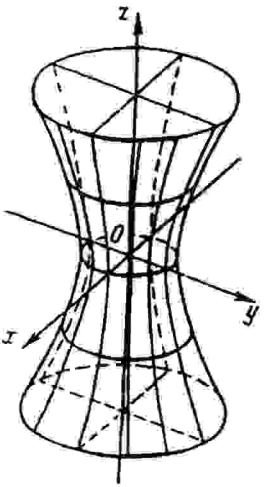


Рис. 2

Линии пересечения эллипсоида с любой плоскостью являются поэтому ограниченными линиями второго порядка, т.е. эллипсами.

Мнимый эллипсоид. Нет ни одной точки пространства, координаты которой удовлетворяют уравнению 2. Принято говорить об этом уравнении как об уравнении *мнимого эллипсоида*.

Вырожденный эллипсоид. Уравнению 3 удовлетворяет только начало координат. Это уравнение принято называть уравнением *вырожденного эллипсоида* (или *мнимого конуса*).

Однополостный гиперболоид (рис. 2). Поверхность, определяемая уравнением 4, называется *однополостным гиперболоидом*.

Как следует из канонического уравнения, координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии однополостного гиперболоида. Сечения гиперболоида плоскостями $z = h$ представляют собой эллипсы с полуосями $a(1+h^2/c^2)^{1/2}$, $b(1+h^2/c^2)^{1/2}$, которые неограниченно возрастают при $h \to \infty$. Эллипс, получающийся при $h = 0$, называется *горловым эллипсом* гиперболоида.

Плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид:

а) при $|h| < b$ по гиперболе с полуосями $a(1 - h^2/b^2)^{1/2}$, $c(1 + h^2/b^2)^{1/2}$, которые убывают от a и c до нуля при $|h| \to b$;

б) при $|h| = b$ по паре пересекающихся прямых;

в) при $|h| > b$ по гиперболе с полуосями $c(-1 + h^2/b^2)^{1/2}$, $a(-1 + h^2/b^2)^{1/2}$, которые неограниченно возрастают при $|h| \to \infty$.

Сечения гиперболоида плоскостями $x = h$ обладают аналогичными свойствами.

Важной особенностью однополостного гиперболоида является наличие прямых, целиком лежащих на этой поверхности.

Теорема 106.2. *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две различные прямые, целиком расположенные на этой поверхности.*

Доказательство. Рассмотрим прямые L и L^*, заданные как линии пересечения плоскостей

$$L: \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L^*: \begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \delta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \delta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \gamma\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \gamma^2 + \delta^2 \neq 0. \end{cases}$$

Прямые L и L^* целиком лежат на поверхности (чтобы убедиться в этом, достаточно почленно перемножить уравнения плоскостей). При этом через каждую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности проходит единственная прямая из семейства L и единственная прямая из семейства L^*. Эти прямые (т.е. пары чисел α, β и γ, δ) находятся из однородных систем уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \frac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \frac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

матрицы которых вырождены (т.е. системы имеют нетривиальные решения) и имеют ранг, равный 1 (т.е. все решения каждой из систем пропорциональны и определяют единственную прямую). Остается добавить, что прямые L и L^* не совпадают (достаточно проверить неколлинеарность их направляющих векторов). ■

Прямые, все точки которых лежат на поверхности, называются *прямолинейными образующими* этой поверхности. Итак, однополостный гиперболоид покрыт двумя различными семействами прямолинейных образующих (рис. 3).

Двуполостный гиперболоид (рис. 4). Поверхность, определяемая уравнением 5, называется *двуполостным гиперболоидом*. Как следует из канонического уравнения, координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии двуполостного гиперболоида.

Плоскости $z = h$ пересекают этот гиперболоид:

а) при $|h| > c$ по эллипсам, размеры которых неограниченно возрастают при $|h| \to \infty$;

б) при $|h| = c$ в единственной точке.

В слое между плоскостями $z = c$ и $z = -c$ нет ни одной точки гиперболоида. Таким образом, двуполостный гиперболоид состоит из

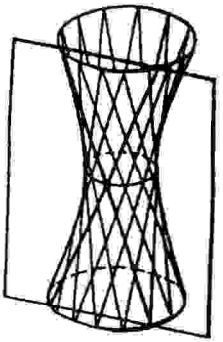


Рис. 3

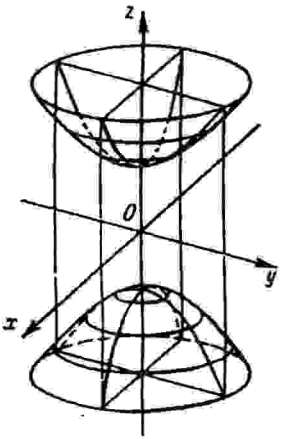


Рис. 4

двух симметричных полостей, расположенных в полупространствах $z \geq c$ и $z \leq -c$.

Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают гиперболоид по гиперболам.

Конус (рис. 5). Поверхность, определяемая уравнением 6, называется *конусом*. Как следует из канонического уравнения, координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии конуса.

Плоскости $z = h$, $h \neq 0$, пересекают конус по эллипсам, размеры которых неограниченно возрастают при $|h| \to \infty$. Прямая, проходящая через любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ конуса и начало координат, является прямолинейной образующей конуса, так как любая точка этой прямой имеет координаты $(x_0 t, y_0 t, z_0 t)$.

Плоскости $y = h$ и $x = h$, где $h \neq 0$, пересекают конус по гиперболам (рис. 6) с полуосями $c|h|/b$, $a|h|/b$ и $c|h|/a$, $b|h|/a$ соответственно; плоскости $x = 0$ и $y = 0$ – по парам пересекающихся прямых.

Плоскими сечениями конуса являются и параболы (рис. 7). Так, параболой будет сечение конуса плоскостью $z = h + cx/a$, где $h \neq 0$, ибо числа x, y являются на этой плоскости аффинными (не прямоугольными) координатами, а уравнение линии, высекаемой на ней конусом, имеет в этих координатах вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(h + cx/a)^2}{c^2} = 0.$$

Традиционными преобразованиями это уравнение приводится к уравнению параболы

$$y^2 = 2\frac{hb^2}{ac}\left(x + \frac{ha}{2c}\right).$$

Таким образом, и эллипс, и гипербола, и парабола являются плоскими сечениями конуса. На этом основании эти линии обычно называют *коническими сечениями*.

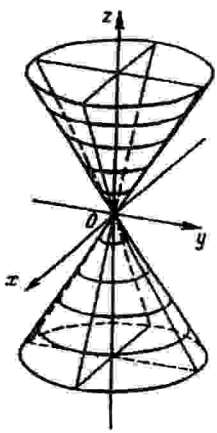


Рис. 5

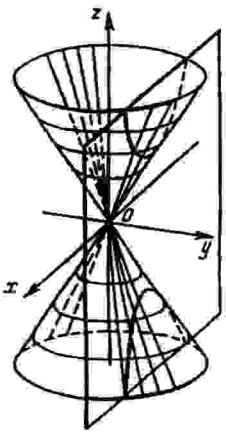


Рис. 6

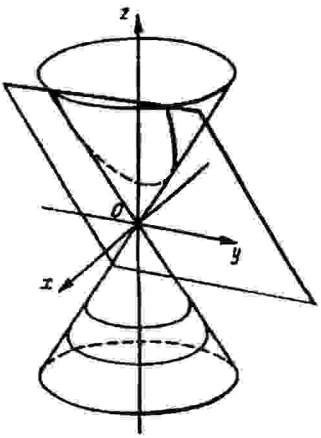


Рис. 7

Эллиптический параболоид (рис. 8). Поверхность, определяемая уравнением 7, называется *эллиптическим параболоидом*. Как следует из канонического уравнения, плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии. Центра симметрии эллиптический параболоид не имеет. Плоскости $z = h$, $h > 0$, пересекают параболоид по эллипсам, размеры которых неограниченно возрастают при $h \to \infty$. Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам, ветви которых направлены вверх.

Гиперболический параболоид (рис. 9). Поверхность, определяемая уравнением 8, называется *гиперболическим параболоидом*. Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии.

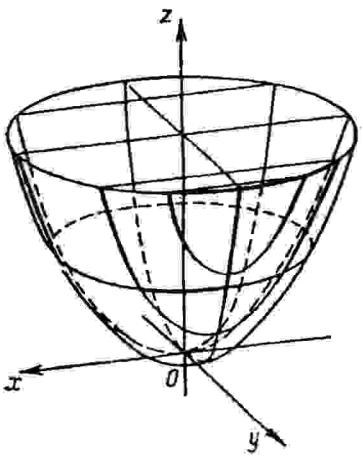


Рис. 8

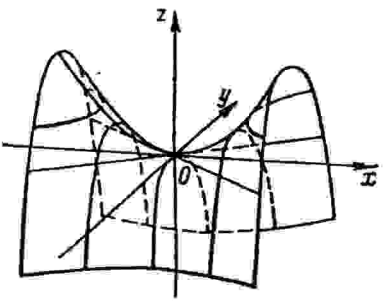


Рис. 9

Центра симметрии гиперболический параболоид не имеет. Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам, ветви первой параболы направлены вверх, а второй – вниз.

Плоскости $z = h$ пересекают параболоид:

а) при $h < 0$ по гиперболам $-\dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1$, где $a_1^2 = -2a^2h$, $b_1^2 = -2b^2h$;

б) при $h > 0$ по гиперболам $\dfrac{x^2}{a_2^2} - \dfrac{y^2}{b_2^2} = 1$, где $a_2^2 = 2a^2h$, $b_2^2 = 2b^2h$;

в) при $h = 0$ по паре пересекающихся прямых.

Как и однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид покрыт двумя различными семействами прямолинейных образующих (рис. 10). Те же рассуждения, что и в случае однополостного гиперболоида, показывают, что *через любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ гиперболического параболоида проходят две различные прямые, целиком лежащие на этой поверхности.* Эти прямые определяются плоскостями

$$L: \begin{cases} \alpha z = \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \\ 2\beta = \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L^*: \begin{cases} \gamma z = \delta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \\ 2\delta = \gamma\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \\ \gamma^2 + \delta^2 \neq 0, \end{cases}$$

где коэффициенты α, β, γ, δ находятся из условия, что эти прямые проходят через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

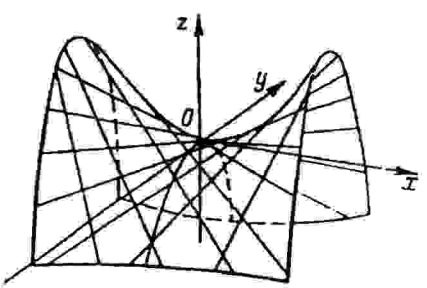


Рис. 10

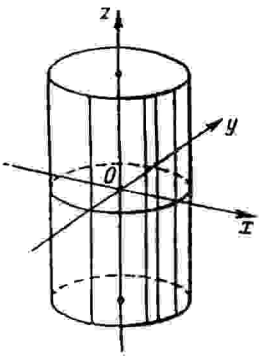


Рис. 11

Цилиндрические поверхности. Все остальные поверхности называются *цилиндрами*. Поверхности, определяемые уравнениями 9, 11 и 12, называются соответственно *эллиптическим цилиндром* (рис. 11), *гиперболическим цилиндром* (рис. 12) и *параболическим цилиндром* (рис. 13). Уравнения этих поверхностей не зависят

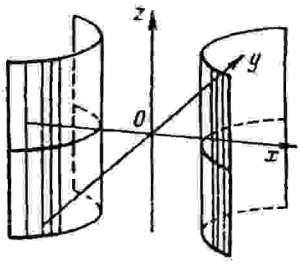


Рис. 12

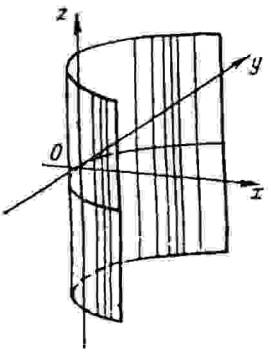


Рис. 13

от z, поэтому все сечения плоскостями $z = h$ совпадают. Для цилиндрических поверхностей достаточно найти сечение плоскостью $z = 0$, чтобы выяснить форму поверхности. Отметим, наконец, что прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности и параллельная оси Oz, является прямолинейной образующей, так как любая точка этой прямой имеет координаты $(x_0, y_0, z_0 + t)$.

Нет ни одной точки пространства, координаты которой удовлетворяют уравнению 10. Принято называть его уравнением *мнимого эллиптического цилиндра*. Уравнение 13 определяет *пару пересекающихся плоскостей* (рис. 14).

Точки поверхности, определяемой уравнением 14, составляют прямую. Это уравнение называют уравнением *пары мнимых пересекающихся плоскостей* (рис. 15).

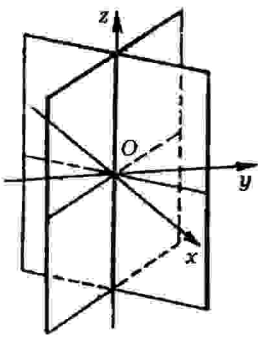


Рис. 14

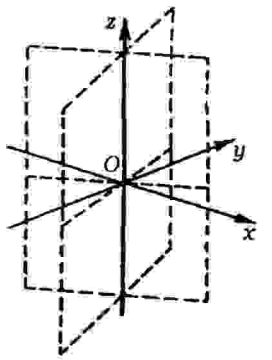


Рис. 15

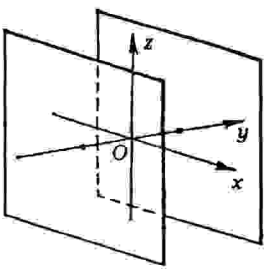


Рис. 16

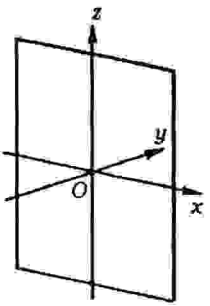


Рис. 17

Поверхности, определяемые уравнениями 15–17, называют соответственно *парой параллельных плоскостей* (рис. 16), *парой мнимых параллельных плоскостей* и *парой совпадающих плоскостей* (рис. 17).

Глава XIX. Линейные нормированные пространства

§ 107. Норма вектора

Пусть V – линейное пространство, вещественное или комплексное. *Нормой* в линейном пространстве V называется отображение $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\| \geq 0$,
   $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство V с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ называется *линейным нормированным пространством*. Число $\|x\|$ называется *нормой вектора* x.

Заметим, что норма $\|\cdot\|$ (как отображение) определяет функцию $f(x)$ векторного аргумента, принимающую вещественные числовые значения. В дальнейшем эту функцию будем называть *функцией нормы*: $f(x) = \|x\|$, $\forall x \in V$.

Нормы в арифметическом пространстве. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$. Положим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1. \tag{107.1}$$

Теорема 107.1. *Функция $\|x\|_p$ является нормой в арифметическом пространстве V.*

Доказательство. Проверка аксиом нормы для (107.1) нетривиальна лишь для неравенства треугольника, которое для $\|\cdot\|_p$ совпадает с классическим *неравенством Минковского*: $\forall x_k, y_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, и $\forall p \geq 1$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}. \tag{107.2}$$

Его вывод опирается на неравенства Юнга и Гёльдера.

Лемма 1 (неравенство Юнга). *Если числа p и q таковы, что $p, q \geq 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то для любых $a \geq 0$, $b \geq 0$*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{107.3}$$

Доказательство леммы. Для $a = 0$ или $b = 0$ неравенство очевидно. Для $a > 0, b > 0$ неравенство (107.3) следует из выпуклости логарифмической функции: для любых $x_1, x_2 > 0$

$$\ln(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta = 1.$$

Положив в этом неравенстве $\alpha = p^{-1}$, $\beta = q^{-1}$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, получим, что

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} = \ln(a^{1/p} b^{1/q}),$$

которое равносильно (107.3). Лемма доказана.

Неравенство (107.3) называется *неравенством Юнга.*

Лемма 2 (неравенство Гёльдера). *Пусть числа p и q таковы, что $p, q \geq 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда для любых векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}. \tag{107.4}$$

Доказательство леммы. Для $x = \theta$ или $y = \theta$ неравенство очевидно. Пусть $x \neq \theta$, $y \neq \theta$. Рассмотрим векторы

$$\widetilde{x} = \frac{x}{\|x\|_p}, \qquad \widetilde{y} = \frac{y}{\|y\|_q}.$$

Очевидно, $\|\widetilde{x}\|_p = 1$, $\|\widetilde{y}\|_q = 1$ и

$$\widetilde{x}_k = \frac{x_k}{\|x\|_p}, \qquad \widetilde{y}_k = \frac{y_k}{\|y\|_q}, \qquad k = \overline{1, n}. \tag{107.5}$$

Применив неравенство Юнга к числам $|\widetilde{x}_k|^p$, $|\widetilde{y}_k|^q$, получим, что

$$|\widetilde{x}_k| \cdot |\widetilde{y}_k| \leq \frac{|\widetilde{x}_k|^p}{p} + \frac{|\widetilde{y}_k|^q}{q}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Сложим эти неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} |\widetilde{x}_k| \cdot |\widetilde{y}_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{x}_k|^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{y}_k|^q}{q} \quad \Longrightarrow \{\text{в силу (107.5)}\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq p^{-1}(\|\widetilde{x}\|_p)^p + q^{-1}(\|\widetilde{y}\|_q)^q \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{\|\widetilde{x}\|_p = \|\widetilde{y}\|_q = 1\} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

т.е. выполняется (107.4). Лемма доказана.

Неравенство (107.4) называется *неравенством Гёльдера.*

Для доказательства теоремы 107.1 применим числовое неравенство $|x_k+y_k| \le |x_k|+|y_k|$ к каждому слагаемому в левой части (107.2):

$$\sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)^p = \sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|\cdot|x_k+y_k|^{p-1} \le \sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)(|x_k+y_k|)^{p-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}|x_k|\cdot|x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|y_k|\cdot|x_k+y_k|^{p-1}.$$

Применим теперь неравенство Гёльдера к каждой сумме, положив $q^{-1} = 1 - p^{-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \{(p-1)q = p\} =$$

$$= \left(\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)^p\right)^{1-(1/p)}.$$

Разделив обе части этого неравенства на $\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)^p\right)^{1-(1/p)}$, получим (107.2). ■

Нормы $\|x\|_p$, $p \ge 1$, называются *нормами Гёльдера* или *p-нормами*. К нормам Гёльдера относится и норма

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n}|x_k|.$$

Легко показать, что это действительно норма и верно соотношение

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|x\|_p.$$

Среди норм Гёльдера чаще всего используются первая, вторая и бесконечная нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}; \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n}|x_k|.$$

Еще о метрическом пространстве. В §74 рассматривалась метрика в евклидовом (и унитарном) пространстве, вводимая через длину:

$$\rho(x,y) = |x-y|, \quad \forall x, y \in E(U).$$

Приведем примеры других метрик:

1) $M = \mathbb{R}$ или $M = \mathbb{C}$: $\rho(x, y) = |x - y|$;

2) $M = \mathbb{R}^n$ или $M = \mathbb{C}^n$: $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$;

3) $M = \mathbf{C}[a, b]$ – множество функций, непрерывных на $[a, b]$:

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|;$$

4) M – любое непустое множество:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

– это одна из дискретных метрик.

Введем важные понятия метрического пространства, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть M – метрическое пространство с метрикой ρ.

Последовательность $\{x^{(k)}\} \subset M$ называется *сходящейся* к точке $a \in M$, если $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x^{(k)}, a) = 0$. Обозначение: $x^{(k)} \to a$ или $a = \lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)}$. Последовательность $\{x^{(k)}\} \subset M$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall m, n > N \;\Rightarrow\; \rho(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство M называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Множества

$$B(x_0, r) = \left\{ x \in M \,\middle|\, \rho(x, x_0) < r \right\},$$
$$\overline{B}(x_0, r) = \left\{ x \in M \,\middle|\, \rho(x, x_0) \le r \right\},$$
$$S(x_0, r) = \left\{ x \in M \,\middle|\, \rho(x, x_0) = r \right\}$$

называются соответственно *открытым шаром, замкнутым шаром, сферой* с центром в точке x_0 радиуса r.

Множество $S \subset M$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

Множество $S \subset M$ называется *замкнутым*, если для любой сходящейся последовательности $\{x^{(k)}\} \subset S$ ее предел содержится в S.

Множество $S \subset M$ называется *компактным* (или *компактом*), если из любой последовательности в нем можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $a \in S$.

Вещественная функция $f(x)$, $x \in M$ (т.е. $f : M \to \mathbb{R}$) называется *непрерывной* в точке $a \in M$, если для любой последовательности $x^{(k)} \to a$: $f(x^{(k)}) \to f(a)$.

Норма и метрика.

Теорема 107.2. *В линейном нормированном пространстве V отображение $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$, определенное равенством*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V, \tag{107.6}$$

является метрикой.

Аксиомы метрики непосредственно вытекают из аксиом нормы. ■

Таким образом, любое нормированное пространство метризуемо. Обратное не всегда верно. Чтобы по метрике можно было восстановить норму, метрика должна обладать дополнительными свойствами.

Теорема 107.3. *Метрика ρ в линейном пространстве V (вещественном или комплексном) определяет норму тогда и только тогда, когда для любых $x, y, z \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$)*

$$\begin{aligned} &1)\ \rho(x,y) = \rho(x+z, y+z) && \text{(инвариантность относительно сдвига);} \\ &2)\ \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x,y) && \text{(инвариантность относительно гомотетии).} \end{aligned} \tag{107.7}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как если $\rho(x,y) = \|x-y\|$, то $\rho(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = \rho(x,y)$, $\rho(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha| \cdot \|x-y\| = |\alpha|\rho(x,y)$.

Достаточность. Покажем, что метрика ρ, удовлетворяющая равенствам (107.7), определяет норму. Положим

$$\|x\| = \rho(x, \theta), \quad \forall x \in V. \tag{107.8}$$

Из аксиом метрики следует, что

а) $\|x\| = \rho(x,\theta) \geq 0$, $\forall x \in V$, и $\|x\| = 0 \iff x = \theta$;

б) $\|\alpha x\| = \rho(\alpha x, \theta) = \rho(\alpha x, \alpha\theta) = |\alpha|\rho(x,\theta) = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$;

в) $\|x+y\| = \rho(x+y, \theta) = \rho(x, -y) \leq \rho(x,\theta) + \rho(-y,\theta) = \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$. ■

В дальнейшем, говоря о нормированном пространстве как о метрическом, мы будем иметь в виду метрику (107.6).

Общие понятия метрического пространства специализируются на случай нормированного пространства с нормой $\|\cdot\|$ следующим образом.

Сходимость последовательности $\{x^{(k)}\}$ к вектору a называется *сходимостью по норме* $\|\cdot\|$ и означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - a\| = 0.$$

Отсюда и из очевидного неравенства $\big|\|x^{(k)}\| - \|a\|\big| \leq \|x^{(k)} - a\|$ следует, что

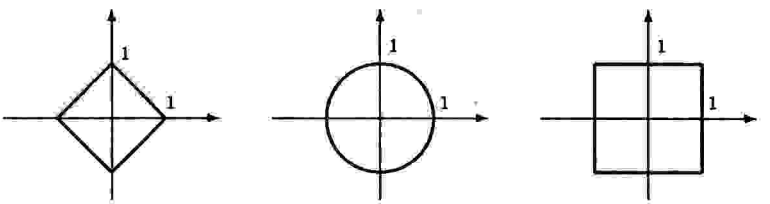
$$\|x^{(k)}\| \to \|a\| \quad \text{при } k \to \infty. \tag{107.9}$$

Возникает естественный вопрос: может ли одна и та же последовательность сходиться по одной норме и не сходиться по другой. Ответ на этот вопрос для конечномерного пространства отрицателен и будет дан в §109.

Шары и сфера в метрическом пространстве называются *шарами* и *сферой по норме* $\|\cdot\|$ и означают, что

$$B(x_0,r)=\{x\in M\mid \|x-x_0\|<r\},$$
$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in M\mid \|x-x_0\|\le r\},$$
$$S(x_0,r)=\{x\in M\mid \|x-x_0\|=r\}.$$

На рис. 1 точками плоскости изображены сферы единичного радиуса с центром $x_0=(0,0)$ по нормам $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^2$.



$\|x\|_1=1$ $\|x\|_2=1$ $\|x\|_\infty=1$

Рис.1

Непрерывность вещественной функции $f(x)$ в точке a метрического пространства называется *непрерывностью относительно нормы* $\|\cdot\|$ и означает, что если $\|x^{(k)}-a\|\to 0$ при $k\to\infty$, то $f(x^{(k)})\to f(a)$.

Нормы в конечномерном пространстве. Нормы Гёльдера рассматривают и в любом конечномерном пространстве V (вещественном или комплексном): если $e=(e_1,\dots,e_n)$ – базис пространства V и $x=\sum_{k=1}^n x_k e_k$, то

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p},\ p\ge 1,\quad \text{и}\quad \|x\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|x_k|. \tag{107.10}$$

Справедливость аксиом нормы установлена теоремой 107.1. Норму $\|x\|_2=\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ называют также *евклидовой* или *естественной нормой* и обозначают символом $\|x\|_E$.

Теорема 107.4 (о непрерывности нормы). *В конечномерном пространстве V любая норма $\|\cdot\|$ непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_2$.*

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что если $\|x^{(k)}-a\|_2\to 0$ при $k\to\infty$, то $\|x^{(k)}\|\to\|a\|$. Пусть $e=(e_1,\dots,e_n)$ – базис пространства V и $x=\sum_{k=1}^n x_k e_k$. Из аксиом нормы следует, что $\|x\|\le\sum_{k=1}^n |x_k|\cdot\|e_k\|\le$ {в силу неравенства Коши–Буняковского} $\le$ $\le\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{1/2}=c\cdot\|x\|_2$, где $c=\left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{1/2}>0$ –

константа, не зависящая от x. Итак, существует $c > 0$ такое, что

$$\|x\| \leq c\|x\|_2, \quad \forall x \in V. \tag{107.11}$$

Если $x^{(k)} \to a$ по норме $\|\cdot\|_2$, то $\|x^{(k)} - a\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $\|x^{(k)} - a\| \leq c\|x^{(k)} - a\|_2$ (в силу (107.11)), то $\|x^{(k)} - a\| \to 0$ и $\|x^{(k)}\| \to \|a\|$ при $k \to \infty$. ■

§ 108. Норма и скалярное произведение

В евклидовом (и унитарном) пространстве V норма может быть введена как длина: $\|x\| = |x|$, $\forall x \in V$. Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств скалярного произведения (§68). Эта норма называется *евклидовой* и обозначается символом $\|\cdot\|_E$. Итак,

$$\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}, \quad \forall x \in V. \tag{108.1}$$

Про евклидову норму говорят, что она *порождается скалярным произведением.*

Таким образом, любое скалярное произведение порождает некоторую норму. Обратное, вообще говоря, не верно. Только норма, обладающая дополнительным свойством, порождается скалярным произведением.

Теорема 108.1. *Норма $\|\cdot\|$ в линейном нормированном пространстве V порождается некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда для нее выполнено равенство*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in V. \tag{108.2}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как если $\|x\| = |x|$, то равенство (108.2) выражает известное тождество параллелограмма (69.3).

Достаточность. Пусть для нормы $\|\cdot\|$ в линейном нормированном пространстве V выполнено равенство (108.2). Построим скалярное произведение, которое порождает эту норму.

1. Если V – вещественное пространство, то положим

$$(x,y) = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big), \quad \forall x, y \in V, \tag{108.3}$$

и покажем, что это будет искомым скалярным произведением. Проверим аксиомы скалярного произведения (68.1).

Аксиомы 1 и 4 очевидны.

Аксиома 3 означает, что

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|z\|^2 =$$

$$= \big(\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2\big) + \big(\|y+z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2\big) \iff$$

$$\Longleftrightarrow \|x+y+z\|^2-\|x+y\|^2 = \|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\bigl(\|x\|^2+\|y\|^2\bigr)-\|z\|^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \{\text{так как } \|x\|^2+\|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x+y\|^2+\frac{1}{2}\|x-y\|^2\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2\|x+y+z\|^2+2\|z\|^2-2\|x+z\|^2-2\|y+z\|^2 = \|x+y\|^2-\|x-y\|^2. \tag{108.4}$$

Для доказательства (108.4) применим равенство (108.2) к вектору $x+y+2z$, рассматривая его как $(x+y+z)+z$ и как $(x+z)+(y+z)$:

$$\|(x+y+z)+z\|^2+\|x+y\|^2 = 2\|x+y+z\|^2+2\|z\|^2,$$
$$\|(x+z)+(y+z)\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x+z\|^2+2\|y+z\|^2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим (108.4).

Теперь проверим аксиому 2: докажем, что

$$(\alpha x, y) = \alpha(x,y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{108.5}$$

а) Из доказанной выше аксиомы 3 следует, что (108.5) верно для любого $\alpha \in \mathbb{N}$. Из (108.3) следует справедливость (108.5) для $\alpha = 0$, а из (108.2) и (108.3) – для $\alpha = -1$. Поэтому (если еще раз воспользоваться аксиомой 3) равенство (108.5) верно для любого $\alpha \in \mathbb{Z}$.

б) Для рационального $\alpha = m/n$, пользуясь уже доказанным свойством, находим

$$(x,y) = \Bigl(n\cdot\frac{1}{n}x, y\Bigr) = n\Bigl(\frac{1}{n}x, y\Bigr) \Longrightarrow \Bigl(\frac{1}{n}x, y\Bigr) = \frac{1}{n}(x,y),$$

$$\Bigl(\frac{m}{n}x, y\Bigr) = \Bigl(m\cdot\frac{1}{n}x, y\Bigr) = m\Bigl(\frac{1}{n}x, y\Bigr) = m\cdot\frac{1}{n}(x,y) = \frac{m}{n}(x,y).$$

Таким образом, для любого рационального α свойство (108.5) имеет место.

в) Произвольное вещественное число α представим как предел последовательности рациональных чисел α_k. Из непрерывности нормы следует непрерывность по α функции $(\alpha x, y)$, определенной соотношением (108.3), поэтому в равенстве $(\alpha_k x, y) = \alpha_k(x,y)$ можно перейти к пределу при $k \to \infty$.

Таким образом, построенная в (108.3) функция является скалярным произведением. Поскольку

$$(x,x) = \frac{1}{2}\bigl(4\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\bigr) = \|x\|^2,$$

это скалярное произведение порождает в пространстве V заданную там норму.

2. Пусть V – комплексное нормированное пространство. Для нормы, порожденной скалярным произведением, имеем

$$\|x+y\|^2 = (x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y) = \|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Re}(x,y),$$
$$\|x+iy\|^2 = (x,x)+i\overline{(x,y)}-i(x,y)+(y,y) = \|x\|^2+\|iy\|^2+2\operatorname{Im}(x,y).$$

Следовательно, скалярное произведение, порождающее норму $\|\cdot\|$ пространства V, можно строить по правилу

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x,y) &= \bigl(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\bigr)/2, \\ \operatorname{Im}(x,y) &= \bigl(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|iy\|^2\bigr)/2. \end{aligned} \tag{108.6}$$

Справедливость аксиом скалярного произведения для (108.6) вытекает из п. 1 и вида функций (108.3) и (108.6). ■

Равенство (108.2) называется *тождеством параллелограмма в нормированном пространстве.*

Замечание. Не всякая норма порождается скалярным произведением. Так, из гёльдеровских норм в арифметическом пространстве только вторая норма $\|\cdot\|_2$ удовлетворяет тождеству параллелограмма. В самом деле, если $x = (1,1,0,\ldots,0)$, $y = (1,-1,0,\ldots,0)$, то $x+y = (2,0,0,\ldots,0)$, $x-y = (0,2,0,\ldots,0)$ и, следовательно, $\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}$, $\|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2$, так что тождество паралелограмма выполняется только для $p=2$. Нетрудно проверить, что и бесконечная норма $\|\cdot\|_\infty$ не порождается никаким скалярным произведением.

§ 109. Эквивалентность норм в конечномерномерном пространстве

Компактность единичной сферы. Обозначим через S_2 единичную сферу по естественной норме с центром $x_0 = \theta$:

$$S_2 = \{x \in V \mid \|x\|_2 = 1\}. \tag{109.1}$$

Теорема 109.1 (о компактности единичной сферы). *Из любой последовательности $\{x^{(k)}\} \subset S_2$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|_2$ к некоторому вектору $a \in S_2$.*

Доказательство. Пусть $e = (e_1,\ldots,e_n)$ – базис пространства и $x^{(k)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} e_i \in S_2$. Тогда

$$\|x^{(k)}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \bigl|x_i^{(k)}\bigr|^2\right)^{1/2} = 1.$$

Это равенство означает ограниченность координат векторов $x^{(k)}$ рассматриваемой последовательности: $-1 \le |x_i^{(k)}| \le 1$. Согласно известной из курса математического анализа теореме Больцано–Вейерштрасса [11, гл. 13], из этой последовательности можно выделить сходящуюся по норме $\|\cdot\|_2$ подпоследовательность $\{x^{(k_m)}\}$. Пусть $x^{(k_m)} \to a$

по норме $\|\cdot\|_2$, т.е. $\|x^{(k_m)}-a\|_2 \to 0$. Тогда $\|x^{(k_m)}\|_2 \to \|a\|_2$ при $m \to \infty$, и $a \in S_2$, так как $\|a\|_2 = \lim\limits_{m\to\infty} \|x^{(k_m)}\|_2 = 1$. ■

Следствие 1. *Сфера S_2 замкнута по норме $\|\cdot\|_2$.*

Эквивалентность норм. Две нормы $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{**}$ в линейном пространстве V называются *эквивалентными*, если существуют такие числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что для любого вектора $x \in V$ выполняются неравенства

$$\|x\|_* \le c_1\|x\|_{**} \quad \text{и} \quad \|x\|_{**} \le c_2\|x\|_*. \tag{109.2}$$

Теорема 109.2. *В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы покажем, что любая норма $\|\cdot\|$ в линейном пространстве V эквивалентна естественной норме $\|\cdot\|_2$, или что существуют такие числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что

$$c_2\|x\|_2 \le \|x\| \le c_1\|x\|_2, \quad \forall x \in V. \tag{109.3}$$

Для $x = \theta$ неравенства (109.3) справедливы при любых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Пусть $x \ne \theta$ – произвольный ненулевой вектор пространства V, тогда

$$\frac{x}{\|x\|_2} \in S_2.$$

Из теорем 107.4 и 109.1 следует, что функция нормы $f(x) = \|x\|$ непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_2$ на единичной сфере S_2. Согласно теореме Вейерштрасса [11, гл. 13] она достигает на этой сфере своих точных верхней и нижней граней, поэтому существуют векторы $x', x'' \in S_2$ такие, что

$$\|x''\| \le \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \le \|x'\|, \quad \forall x \in V.$$

Полагая $c_1 = \|x'\|$, $c_2 = \|x''\|$, получим (109.3). ■

Следствие 2. *В конечномерном линейном пространстве из сходимости по одной норме $\|\cdot\|_*$ следует сходимость по любой другой норме $\|\cdot\|_{**}$,* так как

$$\|x^{(k)} - a\|_{**} \le c_1\|x^{(k)} - a\|_*.$$

Сходимость по норме $\|\cdot\|_\infty$ называют *покоординатной сходимостью*, так как неравенство $\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - a_i\right| \le \varepsilon$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \left|x_1^{(k)} - a_1\right| \le \varepsilon, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \left|x_n^{(k)} - a_n\right| \le \varepsilon \end{cases}$$

и, следовательно, сходимость последовательности $x^{(k)} \to a$ по норме $\|\cdot\|_\infty$ равносильна сходимости координат: $x_i^{(k)} \to a_i$, $i = \overline{1,n}$.

Согласно теореме 109.2, из сходимости $x^{(k)} \to a$ по любой норме следует покоординатная сходимость.

Следствие 3. *В конечномерном пространстве V единичная сфера $S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ по любой норме является компактом,* так как любая норма эквивалентна естественной норме $\|\cdot\|_2$, а сфера S_2 в силу теоремы 109.1 компактна.

Замечание. В §§107–109 рассматривались специальные свойства вещественных и комплексных линейных пространств, связанные с возможностью определить в них понятие предельного перехода. Этот материал, по существу являясь элементарным введением в функциональный анализ, дает удобный инструмент для изучения пределов в линейном пространстве, сводя сходимость по норме векторной последовательности $x^{(k)} \to a$ к сходимости числовой последовательности $\|x^{(k)} - a\| \to 0$. Предельный переход в нормированных пространствах, как будет видно из последующего, позволяет строить "приближения" и находить оценки их точности.

§ 110. Линейные операторы в нормированных пространствах

Непрерывность и ограниченность. Пусть V и W – линейные нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$ соответственно. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется *непрерывным в точке* $x \in V$, если для любой последовательности $\{x^{(k)}\} \subset V$, сходящейся к x по норме $\|\cdot\|_V$, последовательность $\{\mathcal{A}x^{(k)}\}$ сходится к $\mathcal{A}x$ по норме $\|\cdot\|_W$:

$$\|x^{(k)} - x\|_V \to 0 \Rightarrow \|\mathcal{A}x^{(k)} - \mathcal{A}x\|_W \to 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ называется *непрерывным в пространстве* V, если он непрерывен для всех $x \in V$.

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется *ограниченным*, если существует число $c > 0$ такое, что

$$\|\mathcal{A}x\|_W \le c\|x\|_V, \quad \forall x \in V. \tag{110.1}$$

Теорема 110.1. *В конечномерных нормированных пространствах V и W любой линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ограничен.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Тогда согласно аксиомам нормы и неравенству Коши–Буняковского

$$\|\mathcal{A}x\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|\mathcal{A}e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^n \|\mathcal{A}e_i\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = M\|x\|_2,$$

где $M = \left(\sum_{i=1}^n \|\mathcal{A}e_i\|^2\right)^{1/2}$. Отсюда с учетом (109.3) получим, что $\|\mathcal{A}x\| \le c\|x\|$, где $c = M/c_2 > 0$. ■

Следствие 1. *В конечномерных нормированных пространствах V и W любой линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ непрерывен.*

Это следует из неравенства

$$\|\mathcal{A}x^{(k)} - \mathcal{A}x\|_W = \|\mathcal{A}(x^{(k)} - x)\|_W \le c\|x^{(k)} - x\|_V.$$

Пример неограниченного оператора следует искать в бесконечномерном пространстве. Так, если $\mathbf{C}[0,2]$ – множество непрерывных и дифференцируемых на $[0,2]$ функций с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{x\in[0,2]} |f(x)|$ и $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования: $\mathcal{D}f(x) = f'(x)$, то для $f_n(x) = \sin nx$ выполнено $\|f_n(x)\| = 1$, вместе с тем $\|\mathcal{D}f_n(x)\| = n$.

Норма оператора. Пусть V и W – линейные нормированные пространства (оба вещественные или оба комплексные). Линейное пространство $\mathcal{L}(V, W)$, как и любое линейное пространство, можно сделать нормированным, введя на нем *норму оператора*. Однако для нормы оператора нет той свободы выбора, которая имеет место для векторных норм, так как помимо линейных операций (заложенных в аксиомах векторной нормы) оператор связан с другими операторами еще и операцией умножения; кроме того, оператор действует на векторы и его норма должна быть связана с векторными нормами. Вводя нормы оператора, в той или иной форме принимают во внимание операцию умножения операторов и векторные нормы пространств V и W.

Норма оператора называется *мультипликативной*, если выполнено неравенство

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \le \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \tag{110.2}$$

для любых операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, для которых определена операция $\mathcal{A}\mathcal{B}$. Свойство (110.2) называется *свойством мультипликативности* нормы.

Норма оператора называется *согласованной* с векторными нормами $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ пространств V и W, если для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{A}x\|_W \le \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_V, \qquad \forall x \in V.$$

Замечание 1. В дальнейшем в символе $\|\cdot\|_V$ индекс V будет опускаться, если из контекста ясно, о каком пространстве идет речь.

Теорема 110.2. *Собственное значение линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ не превосходит по абсолютной величине любую его согласованную норму.*

Доказательство. Если $\mathcal{A}x = \lambda x$, то для любой согласованной нормы оператора имеем $\|\mathcal{A}x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ и $\|\mathcal{A}x\| \le \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|$, откуда следует, что $|\lambda| \le \|\mathcal{A}\|$. ■

Подчиненная норма. Пусть V, W – конечномерные пространства и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Из теоремы 110.1 следует ограниченность оператора $\mathcal{A}$, т.е. существование числа $c > 0$ такого, что $\|\mathcal{A}x\| \le c\|x\|$, $\forall x \in V$ или, в равносильной формулировке, $\|\mathcal{A}x\| / \|x\| \le c$, $\forall x \ne \theta$.

Это означает, что числовое множество

$$\left\{ \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \neq \theta \right\}$$

ограничено сверху и, следовательно, для него существует точная верхняя грань. Положим

$$\mu(\mathcal{A}) = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|}. \tag{110.3}$$

Теорема 110.3. *Отображение $\mu(\mathcal{A})$ является мультипликативной нормой в пространстве $\mathcal{L}(V, W)$, согласованной с векторными нормами пространств V и W.*

Доказательство. Очевидно, что $\mu(\mathcal{A}) \geq 0$ для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, при этом равенство $\mu(\mathcal{A}) = 0$ означает, что $\|\mathcal{A}x\| = 0, \forall x \in V$, т.е. $\mathcal{A}x = \theta, \forall x \in V$ или $\mathcal{A} = \mathcal{O}$. Аксиомы 2 и 3 вытекают из свойств точной верхней грани. Таким образом, $\mu(\mathcal{A})$ – векторная норма в пространстве $\mathcal{L}(V, W)$. Проверим свойство мультипликативности. Из (110.3) следует, что $\|\mathcal{A}x\| \leq \mu(\mathcal{A})\|x\|$, $\forall x \in V$, так что $\mu(\mathcal{A})$ обладает свойством согласованности с векторными нормами пространств V и W. Отсюда получаем

$$\mu(\mathcal{AB}) = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{AB}x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq \theta} \mu(\mathcal{A}) \frac{\|\mathcal{B}x\|}{\|x\|} = \mu(\mathcal{A}) \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{B}x\|}{\|x\|} = \mu(\mathcal{A})\mu(\mathcal{B}). \blacksquare$$

Норма $\mu(\mathcal{A})$ называется *нормой* оператора $\mathcal{A}$, *подчиненной (порожденной)* векторным нормам пространств V и W.

Обозначение: $\|\mathcal{A}\|$. Итак,

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}x\|.$$

Попутно показано, что подчиненная норма – наименьшая из всех согласованных норм, так как является точной верхней гранью множества, а согласованная норма – одной из верхних граней этого множества.

Замечание 2. Подчиненная норма определяется не только самим оператором, но и векторными нормами пространств V и W. Меняя векторные нормы, можно изменить и норму оператора. Рассмотрим наиболее часто употребляемые нормы.

Спектральная норма. Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пространства. Норма линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, порожденная евклидовыми нормами вектора, называется *спектральной нормой*. Обозначение: $\|\mathcal{A}\|_2$. Итак,

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sup_{\|x\|_E=1} \|\mathcal{A}x\|_E = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)}.$$

Теорема 110.4. *Спектральная норма оператора равна максимальному сингулярному числу этого оператора.*

Доказательство. Пусть $n = \dim V$, $m = \dim W$ и $e_1, \ldots, e_n$ – правый сингулярный базис, а $\rho \geq \cdots \geq \rho_s$ $(s = \min(n, m))$ – сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$ (§100), $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Положим $\rho_{s+1} = \ldots = \rho_n = 0$, если $s < n$. Тогда $\|\mathcal{A}x\|_E^2 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 |x_i|^2 \leq \rho_1^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$. Отсюда следует, что $\|\mathcal{A}x\|_E \leq \rho_1$, если $\|x\|_E = 1$, и $\|\mathcal{A}x\|_E = \rho_1$, если $x = e_1$ (очевидно, $\|e_1\|_E = 1$). Значит, $\rho_1 = \max\limits_{\|x\|_E=1} \|\mathcal{A}x\|_E = \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|\mathcal{A}x\|_E = \|\mathcal{A}\|_2$. ■

Следствие 2. *Спектральная норма нормального оператора равна абсолютной величине максимального по модулю собственного значения этого оператора.*

Теорема 110.5. *Сингулярные числа линейного оператора в евклидовом (унитарном) пространстве не изменяются при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{V}$, где $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$, $\mathcal{V}^*\mathcal{V} = \mathcal{I}$. Тогда $\mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{V}^*\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{V}$, следовательно, матрицы операторов $\mathcal{B}^*\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ подобны и их собственные значения совпадают. ■

Следствие 3. *Спектральная норма линейного оператора не изменяется при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.*

§ 111. Матричные нормы оператора и нормы матрицы

Спектральная норма линейного оператора является, по существу, единственной подчиненной нормой, не связанной явно с базисами пространств V и W. Если же в пространствах V и W зафиксированы базисы, то возможность введения операторных норм существенно расширяется.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пространств V и W. Введем в V и W векторную норму $\|\cdot\|_p$ согласно (107.10). Будем считать, что в пространствах V и W введены нормы одинакового типа. Обозначим через $\|\mathcal{A}\|_p$ норму оператора, подчиненную векторным нормам $\|\cdot\|_p$, через $A = (a_{ij})$ – матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисах e и f.

Теорема 111.1. *Для любого оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$

$$\|\mathcal{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Доказательство. Пусть $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, тогда

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) f_i.$$

Согласно (107.10),

$$\|\mathcal{A}x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big| \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|. \quad (111.1)$$

Пусть k-й столбец матрицы A имеет максимальную столбцовую сумму, т.е. $\sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| = \max\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$. Тогда из (111.1) следует, что $\|\mathcal{A}x\|_1 \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| = \|x\|_1 \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$. Это означает, что $\|\mathcal{A}x\|_1 \le \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$ для любого вектора x, у которого $\|x\|_1 = 1$, и $\|\mathcal{A}x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$ для вектора $x = e_k$ (очевидно, $\|e_k\|_1 = 1$). Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| = \sup\limits_{\|x\|_1=1} \|\mathcal{A}x\|_1$. ■

Теорема 111.2. *Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*

$$\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 111.1. Оно предоставляется читателю. ■

Замечание. Векторные нормы $\|\cdot\|_2$ пространств V и W порождают спектральную норму оператора $\|\mathcal{A}\|_2$, так как норма $\|\cdot\|_2$ совпадает с евклидовой нормой $\|\cdot\|_E$, если в пространствах V и W ввести скалярное произведение так, чтобы базисы e и f стали ортонормированными.

Евклидова норма оператора. Можно строить норму линейного оператора и как норму вектора в линейном пространстве $\mathcal{L}(V, W)$. Одна из таких норм представляет интерес.

Евклидовой нормой оператора $\mathcal{A}$ называется число

$$\|\mathcal{A}\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}. \quad (111.2)$$

Корректность этого определения следует из легко проверяемых для $\|\mathcal{A}\|_E$ аксиом нормы.

Как видно из (111.2), евклидова норма оператора легко вычисляема (по сравнению, например, с $\|\mathcal{A}\|_2$). При этом она обладает многими свойствами подчиненных норм. Перечислим их.

1. *Свойство согласованности:* $\|\mathcal{A}x\|_E \le \|\mathcal{A}\|_E\|x\|_E$, так как в силу неравенства Коши–Буняковского $\|\mathcal{A}x\|_E^2 = \sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2 \le \le \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2\right) = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \cdot \|\mathcal{A}\|_E^2 = \|\mathcal{A}\|_E^2\|x\|_E^2$.

2. *Свойство мультипликативности:* $\|\mathcal{AB}\|_E \le \|\mathcal{A}\|_E\|\mathcal{B}\|_E$, ибо

$$\|\mathcal{AB}\|_E^2 = \sum_{i,j}\Big|\sum_k a_{ik}b_{kj}\Big|^2 \le \sum_{i,j}\Big(\sum_k |a_{ik}||b_{kj}|\Big)^2 \le$$

$$\le \sum_{i,j}\Big(\sum_k |a_{ik}|^2 \cdot \sum_k |b_{kj}|^2\Big) = \sum_{i,k}|a_{ik}|^2 \sum_{j,k}|b_{kj}|^2 = \|\mathcal{A}\|_E^2\|\mathcal{B}\|_E^2.$$

3. $\|\mathcal{A}\|_E^2 = \operatorname{tr}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \operatorname{tr}\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Эти равенства легко проверяются непосредственно.

4. $\|\mathcal{A}\|_E^2 = \rho_1^2 + \cdots + \rho_s^2$, где $\rho_1, \ldots, \rho_s$ – сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$ и $s = \min(n, m)$. Это следует из свойства 3 и теоремы 92.2 (следствие).

5. $\|\mathcal{A}\|_E \ge \|\mathcal{A}\|_2$ в силу теоремы 110.4.

6. $\|\mathcal{A}\|_E$ не изменяется при умножении оператора $\mathcal{A}$ на ортогональные (унитарные) операторы. Это следует из свойства 4 и теоремы 110.5.

Норма матрицы вводится аналогично норме оператора, по существу, весь §110 относится и к матрицам, с очевидной заменой термина "оператор" на термин "матрица".

Среди норм матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (или $\mathbb{C}^{m\times n}$) наиболее употребительны следующие нормы:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^m |a_{ij}|;$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

$\|A\|_2$ = максимальному сингулярному числу матрицы A;

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

§ 112. Экстремальные задачи для самосопряженного оператора

Под экстремальными задачами понимаются задачи, связанные с нахождением экстремумов функций. Изучение таких задач составляет содержание так называемого *вариационного исчисления*. Большинство методов, существующих в вариационном исчислении, связано со специальным видом тех функций, экстремальные значения которых ищутся. В случае самосопряженного оператора в качестве такой функции рассматривается функция

$$f(x) = \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}, \quad x \neq \theta, \tag{112.1}$$

называемая *отношением Рэлея*.

Вариационные свойства собственных значений. Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в евклидовом (унитарном) пространстве V. Построим в пространстве V ортонормированный базис

$$e_1, \ldots, e_n \tag{112.2}$$

из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственным значениям

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n. \tag{112.3}$$

Такой нумерации собственных векторов и собственных значений будем придерживаться всюду в этом параграфе. Под нормой $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму $\|\cdot\|_E$, так что если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

Отношение Рэлея может быть записано в виде

$$f(x) = (\mathcal{A}x, x), \quad \|x\| = 1. \tag{112.4}$$

Теорема 112.1. *Для самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ справедливы равенства*

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} (\mathcal{A}x, x), \qquad \lambda_n = \min_{\|x\|=1} (\mathcal{A}x, x).$$

Доказательство. Для любого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$ имеем $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \in V$ и, с учетом ортонормированности базиса, $(\mathcal{A}x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2$. В силу (112.3) отсюда следует, что $\lambda_1 \geq (\mathcal{A}x, x) \geq \lambda_n$, если $\|x\| = 1$; причем $(\mathcal{A}e_1, e_1) = \lambda_1$, $(\mathcal{A}e_n, e_n) = \lambda_n$ и $\|e_1\| = 1$, $\|e_n\| = 1$. Следовательно, λ_1 и λ_n – наибольшее и наименьшее значения $(\mathcal{A}x, x)$ на единичной евклидовой сфере. ■

Замечание. Эта теорема дает экстремальные свойства и квадратичной формы в евклидовом (унитарном) пространстве: *на единичной сфере квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ принимает экстремальные значения на тех векторах, которые являются собственными векторами самосопряженного оператора $\mathcal{H}$* (теорема 104.3).

Кстати, в терминах квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ задача поиска экстремальных значений квадратичной формы представляет собой классическую задачу на условный экстремум. Одним из методов ее решения является метод Лагранжа [11].

Теорема 112.2. *Если L – линейная оболочка собственных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ из базиса* (112.2) *самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то*

$$\lambda_{i_1} = \max_{\|x\|=1, x \in L} (\mathcal{A}x, x), \qquad \lambda_{i_k} = \min_{\|x\|=1, x \in L} (\mathcal{A}x, x). \tag{112.5}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 112.1. ■

Теорема 112.3 (теорема Куранта–Фишера). *Для собственных значений самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x\in L_k} (\mathcal{A}x, x), \\ \lambda_k &= \min_{L_{n-k+1}} \max_{\|x\|=1, x\in L_{n-k+1}} (\mathcal{A}x, x), \end{aligned} \tag{112.6}$$

где максимум (в первом соотношении) берется по всевозможным k-мерным подпространствам L_k, а минимум (во втором соотношении) – по всевозможным $(n-k+1)$-мерным подпространствам L_{n-k+1} пространства V.

Доказательство. Пусть L_k – произвольное k-мерное подпространство и W_{n-k+1} – линейная оболочка собственных векторов $e_k, \dots, e_n$ из (112.2) оператора $\mathcal{A}$. Так как $\dim L_k + \dim W_{n-k+1} = n+1$, то $L_k \cap W_{n-k+1} \neq \{\theta\}$. Пусть $x_0 \in L_k \cap W_{n-k+1}$ и $\|x_0\| = 1$. Так как $x_0 \in W_{n-k+1}$, то из первого равенства (112.5), примененного к подпространству W_{n-k+1}, следует, что $f(x_0) \leq \lambda_k$. С другой стороны, $x_0 \in L_k$ и следовательно, существует вектор $x_0 \in L_k$, $\|x_0\| = 1$ такой, что $f(x_0) \leq \lambda_k$. Таким образом, для любого k-мерного подпространства L_k имеем

$$\min_{\|x\|=1, x\in L_k} f(x) \leq \lambda_k,$$

и

$$\max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x\in L_k} f(x) \leq \lambda_k. \tag{112.7}$$

Равенство в (112.7) достигается для $L_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$. Второе соотношение в (112.6) доказывается аналогично. ■

Вариационные свойства сингулярных чисел. Пусть V, W – евклидовы (или унитарные) пространства, $\dim V = n$, $\dim W = m$. В обоих пространствах рассматриваются евклидовы нормы: $\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}$.

Теорема 112.4. *Пусть $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_s$, $s = \min(m,n)$, – сингулярные числа оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$. Тогда для любых k, $k = \overline{1,s}$, справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \rho_k &= \max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x\in L_k} \|\mathcal{A}x\|, \\ \rho_k &= \min_{L_{n-k+1}} \max_{\|x\|=1, x\in L_{n-k+1}} \|\mathcal{A}x\|, \end{aligned} \tag{112.8}$$

где максимум (в первом соотношении) берется по всевозможным k-мерным подпространствам L_k, а минимум (во втором соотношении) – по всевозможным $(n-k+1)$-мерным подпространствам L_{n-k+1} пространства V.

Доказательство. Известно (§100), что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – самосопряженный оператор с собственными значениями $\rho_1^2 \geq \ldots \geq \rho_s^2$. Из теоремы Куранта–Фишера следует, что

$$\rho_k^2 = \max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x \in L_k} (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x),$$
$$\rho_k^2 = \min_{L_{n-k+1}} \max_{\|x\|=1, x \in L_{n-k+1}} (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x).$$

Отсюда, если учесть, что $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = \|\mathcal{A}x\|^2$, следует утверждение теоремы. ■

Разделение собственных значений. *Главной подматрицей* k-го порядка матрицы A называется матрица, составленная из элементов матрицы A, расположенных в k строках и k столбцах с одинаковыми номерами.

Теорема 112.5. *Пусть самосопряженная матрица A имеет собственные значения*

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$$

и пусть B – ее главная подматрица $(n-1)$-го порядка. Тогда собственные значения $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ матрицы B разделяют собственные значения матрицы A, т.е.

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n. \tag{112.9}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что подматрица B находится в левом верхнем углу матрицы A. Матрицу A будем рассматривать как матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в некотором ортонормированном базисе $g_1, \ldots, g_n$ пространства V, а матрицу B – как матрицу самосопряженного оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\widetilde{V}, \widetilde{V})$ в базисе $g_1, \ldots, g_{n-1}$ подпространства $\widetilde{V}$ пространства V. Очевидно, что для векторов $x \in \widetilde{V}$

$$(\mathcal{B}x, x) = (\mathcal{A}x, x). \tag{112.10}$$

Пусть $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – ортонормированный базис $\widetilde{V}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{B}$, а $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ – соответствующие собственные значения. Обозначим $\widetilde{L}_k = \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_k)$, $\widetilde{L}_{n-k} = \mathcal{L}(f_k, \ldots, f_{n-1})$. На основании теоремы 112.2 с учетом (112.10)

$$\mu_k = \min_{\|x\|=1, x \in \widetilde{L}_k} (\mathcal{A}x, x), \quad \mu_k = \max_{\|x\|=1, x \in \widetilde{L}_{n-k}} (\mathcal{A}x, x).$$

Так как $\widetilde{L}_k$ – одно из k-мерных подпространств пространства V, то в силу теоремы Куранта–Фишера

$$\mu_k \leq \max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x \in L_k} (\mathcal{A}x, x) = \lambda_k, \quad \text{т.е. } \mu_k \leq \lambda_k.$$

С другой стороны, $\widetilde{L}_{n-k}$ – одно из подпространств пространства V размерности $n-(k+1)+1$ и в силу теоремы Куранта–Фишера

$$\mu_k \geq \min_{L_{n-(k+1)+1}} \max_{\|x\|=1, x\in L_{n-(k+1)+1}} (Ax, x) = \lambda_{k+1}, \quad \text{т.е. } \mu_k \geq \lambda_{k+1}.$$

Таким образом, $\lambda_k \geq \mu_k \geq \lambda_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$. ■

Соотношения (112.9) называются *соотношениями разделения собственных значений.*

Следствие. Если A – матрица (вещественная или комплексная) размера $m \times n$, B – подматрица, состоящая из $n-1$ столбцов матрицы A, то для сингулярных чисел $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_n$ матрицы A и $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{n-1}$ матрицы B имеют место соотношения

$$\rho_1 \geq \sigma_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \sigma_{n-1} \geq \rho_n. \tag{112.11}$$

Эти неравенства вытекают из соотношений разделения собственных значений самосопряженной матрицы $A^H A$, для которой матрица $B^H B$ является главной подматрицей $(n-1)$-го порядка. Соотношения (112.11) называются *соотношениями разделения сингулярных чисел.*

§ 113. Задачи наилучшего приближения в нормированном пространстве

Наилучшее приближение. Если V – метрическое пространство, L – его подпространство и f – фиксированный элемент пространства V, то, как известно (§74), величина

$$\rho(f, L) = \inf_{x\in L} \rho(f, x)$$

называется расстоянием от элемента f до множества L или, как говорят иначе, *отклонением элемента f от множества L.*

Если существует элемент $x_0 \in L$ такой, что

$$\rho(f, L) = \rho(f, x_0),$$

то элемент x_0 называется *элементом наилучшего приближения элемента f на множестве L.*

Теорема 113.1 (о наилучшем приближении). *Если V – нормированное пространство и L – его конечномерное подпространство, то для любого вектора $f \in V$ существует вектор наилучшего приближения на L.*

Доказательство. Покажем, что для любого вектора $f \in V$ существует вектор $x_0 \in L$ такой, что

$$\|f - x_0\| = \inf_{x\in L} \|f - x\|.$$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис подпространства L и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Тогда $\|f - x\| = \left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|$. Требуется найти числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ так, чтобы функция

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

принимала наименьшее значение.

Заметим прежде всего, что $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – непрерывная функция своих аргументов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, так как

$$|\varphi(\lambda_1', \ldots, \lambda_n') - \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| = \Big| \|f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k' e_k\| - \|f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| \Big| \leq$$

$$\leq \big\{\|a - b\| \geq \big|\|a\| - \|b\|\big|\big\} \leq \left\| (f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k' e_k) - (f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k' - \lambda_k| \cdot \|e_k\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k' - \lambda_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|.$$

Пусть ρ – точная нижняя грань множества значений функции $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Рассмотрим новую функцию

$$\psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|.$$

Эта функция на единичной евклидовой сфере $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 = 1$ неотрицательна, непрерывна и по известной теореме Вейерштрасса [11] она достигает на ней своей точной нижней грани. Пусть

$$\mu = \min_{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 = 1} \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Очевидно, что $\mu > 0$.

Рассмотрим все векторы $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in L$, для которых

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \right)^{1/2} > \frac{1}{\mu}(\rho + 1 + \|f\|) \equiv R. \tag{113.1}$$

Для этих векторов

$$\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \geq \|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\| - \|f\| =$$

$$= \left|\psi\left(\frac{\lambda_1}{(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2)^{1/2}},\dots,\frac{\lambda_n}{(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2)^{1/2}}\right)\right| \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\right)^{1/2} - \|f\| \geq$$

$$\geq \mu\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\right)^{1/2} - \|f\| > \rho + 1.$$

Таким образом, для векторов $x = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k \in L$, удовлетворяющих условию (113.1), $\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \|f - x\| > \rho + 1$. Следовательно, желая найти наименьшее значение функции $\|f - x\|$, можно ограничиться рассмотрением только тех векторов $x = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k \in L$, для которых $\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2 \leq R^2$. Функция $\|f - x\|$ непрерывна на замкнутом шаре $\|x\|_2 \leq R$ и по теореме Вейерштрасса [11] существует вектор $x_0 \in L$, для которого $\|f - x_0\| = \rho$. ■

Замечание. Если V – конечномерное евклидово (или унитарное) пространство, то задача наилучшего приближения вектора f на подпространстве L решена в §74 для евклидовой нормы: единственным вектором наилучшего приближения вектора f на подпространстве L является ортогональная проекция вектора f на подпространство L.

Аппроксимация оператора (матрицы).

Теорема 113.2. *Пусть V и W – евклидовы (или унитарные) пространства и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$. Пусть $\operatorname{rg}\mathcal{A} = r$ и $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_r > 0$ – ненулевые сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$. Если $k \in \mathbb{N}$, $k \leq r$, то*

$$\min_{\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V,W),\operatorname{rg}\mathcal{B}\leq k}\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|_2 = \rho_{k+1}. \tag{113.2}$$

Доказательство. 1. Прежде всего отметим, что в силу согласованности спектральной нормы с евклидовыми векторными нормами $\|(\mathcal{A} - \mathcal{B})x\|_E \leq \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|_2 \cdot \|x\|_E$. Отсюда следует, что

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|_2 \geq \|\mathcal{A}x - \mathcal{B}x\|_E, \quad \|x\|_E = 1. \tag{113.3}$$

2. Пусть $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_m$ – сингулярные базисы для оператора $\mathcal{A}$, т.е.

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_i = \rho_i f_i, & i = \overline{1,r}, \\ \mathcal{A}e_i = \theta, & i > r. \end{cases}$$

3. Рассмотрим оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$. Если $\operatorname{rg}\mathcal{B} \leq k$, то $\operatorname{def}\mathcal{B} \geq \geq n-k$. Пусть $L = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_{k+1})$, тогда $\ker\mathcal{B} \cap L \geq n-k+k+1-n = 1$. Следовательно, существует ненулевой вектор $x_0 \in \ker\mathcal{B} \cap L$. Будем считать, что $\|x_0\|_E = 1$.

Так как $x_0 \in L$, то в силу (112.8)

$$\|\mathcal{A}x_0\| \geq \rho_{k+1}. \tag{113.4}$$

Так как $x_0 \in \ker\mathcal{B}$, то

$$\|\mathcal{A}x_0 - \mathcal{B}x_0\|_E = \|\mathcal{A}x_0\|_E. \tag{113.5}$$

Из (113.3)–(113.5) следует, что

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|_2 \geq \rho_{k+1} \tag{113.6}$$

для любого оператора $\mathcal{B}$, для которого $\operatorname{rg}\mathcal{B} \leq k$.

4. Неравенство (113.6) достигается для оператора $\mathcal{B}$ ранга k, определенного равенствами

$$\begin{cases} \mathcal{B}e_i = \rho_i f_i, & i = \overline{1,k}, \\ \mathcal{B}e_i = \theta, & i > k, \end{cases}$$

ибо для оператора $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ максимальным сингулярным числом является ρ_{k+1}. ■

Расстояние до множества вырожденных матриц.

Теорема 113.3. *Спектральное расстояние от заданной невырожденной матрицы A до множества вырожденных матриц равно ее минимальному сингулярному числу.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме 113.2:

$$\inf_{|B|=0} \|A - B\|_2 = \inf_{\operatorname{rg} B \leq n-1} \|A - B\|_2 = \rho_n. \quad ■$$

§ 114. Линейные операторные уравнения

Рассмотрим проблему решения систем линейных алгебраических уравнений с точки зрения свойств линейного оператора.

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пространства, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $u \in W$. Уравнение

$$\mathcal{A}z = u \tag{114.1}$$

называется *линейным операторным уравнением*, вектор u – *правой частью*, вектор z – *решением*. Очевидно, в матричной записи операторное уравнение превращается в систему линейных алгебраических уравнений и, следовательно, все свойства систем уравнений можно переносить на операторные уравнения, и наоборот. Отметим некоторые из этих свойств в терминах операторных уравнений.

Однородное уравнение

$$\mathcal{A}^* w = \theta \tag{114.2}$$

называется *сопряженным* к уравнению (114.1).

Теорема 114.1 (альтернатива Фредгольма). *Либо основное уравнение* (114.1) *имеет решение при любой правой части $u \in W$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $r = \operatorname{rg} \mathcal{A}$, $m = \dim W$. Возможны два случая: либо $r = m$, либо $r < m$. Условие $r = m$ равносильно условию $\operatorname{im} \mathcal{A} = W$, которое означает, что уравнение (114.1) имеет решение при любом $u \in W$. При этом так как $\operatorname{rg} \mathcal{A} = \operatorname{rg} \mathcal{A}^*$, то $\ker \mathcal{A}^* = \{\theta\}$ и уравнение (114.2) не имеет ненулевого решения. Условие $r < m$ равносильно условию $\operatorname{def} \mathcal{A}^* > 0$, которое означает существование ненулевого вектора $w \in \ker \mathcal{A}^*$, т.е. ненулевого решения (114.2). При этом $\operatorname{im} \mathcal{A} \neq W$ и уравнение (114.1) имеет решение не для любого $u \in W$. ■

Замечание 1. Альтернатива Фредгольма для оператора $\mathcal{A}$, действующего в одном пространстве V, означает, что либо основное уравнение имеет единственное решение при любом $u \in V$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.

Теорема 114.2 (теорема Фредгольма). *Операторное уравнение* (114.1) *имеет решение тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям сопряженного уравнения.*

Доказательство. Уравнение (114.1) имеет решение тогда и только тогда, когда $u \in \operatorname{im} \mathcal{A}$ или, с учетом (95.4), когда $u \in \ker^{\perp} \mathcal{A}^*$. Это равносильно ортогональности вектора u всем векторам $\ker \mathcal{A}^*$, т.е. решениям уравнения (114.2). ■

Нормальное решение. Пусть уравнение (114.1) разрешимо, т.е. имеет хотя бы одно решение. Обозначим через H множество всех его решений. *Нормальным решением* уравнения (114.1) называется такое его решение z_0, что

$$\|z_0\|_E = \inf_{z \in H} \|z\|_E.$$

Другими словами, нормальное решение – это решение наименьшей длины. Корректность определения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 114.3. *Для любого разрешимого уравнения* (114.1) *нормальное решение существует и единственно.*

Доказательство. Существование. Пусть z – решение уравнения (114.1). Совокупность H всех решений этого уравнения является линейным многообразием $H = z + \ker \mathcal{A}$, так как для множеств H и $z + \ker \mathcal{A}$, как легко показать, имеет место двустороннее вложение. Из свойств линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве (теорема 73.1) следует существование и единственность нормального вектора сдвига z_0, ортогонального направляющему подпространству $\ker \mathcal{A}$. Причем вектор z_0 имеет наименьшую длину сре-

ди всех решений уравнения (114.1). Таким образом, z_0 – нормальное решение уравнения (114.1).

Единственность. Пусть z_1 – нормальное решение уравнения (114.1). Тогда $z_1 \in H$, т.е. $z_1 = z_0 + w$, где $w \in \ker \mathcal{A}$, $(w, z_0) = 0$, и $\|z_1\|_E^2 = \|z_0\|_E^2 + \|w\|_E^2$. Так как $\|z_0\|_E = \|z_1\|_E$, то $w = \theta$ и $z_1 = z_0$. ■

Замечание 2. Доказательство теоремы дает правило для отыскания нормального решения (теорема 73.2): z_0 – перпендикуляр, опущенный из любого решения z уравнения (114.1) на $\ker \mathcal{A}$.

Псевдорешение. Рассматривается уравнение (114.1), не обязательно разрешимое. Вектор $r = \mathcal{A}z - u$ называется *невязкой* вектора z, функция $F(z) = \|\mathcal{A}u - z\|_E^2$ – *функционалом невязки*.

Очевидно, вектор z является решением уравнения (114.1) тогда и только тогда, когда его невязка $r = \theta$, т.е. когда $\|r\|_E = 0$. Поскольку нулевое значение нормы является наименьшим, решение z можно рассматривать как вектор, невязка которого имеет наименьшую норму, или, как принято говорить, *минимизирующий функционал невязки*.

Задача отыскания векторов, минимизирующих функционал невязки, имеет смысл и тогда, когда уравнение (114.1) неразрешимо (например, вследствие погрешностей измерения $\mathcal{A}$ и u). В этом случае, если z минимизирует функционал невязки, то расстояние $\rho(\mathcal{A}z, u) = \|\mathcal{A}z - u\|_E$ минимально и, следовательно, при таком z левая часть уравнения $\mathcal{A}z$ "ближе" всего к правой части u. Для многих задач вычислительной математики векторы, минимизирующие функционал невязки, представляют интерес (даже если уравнение (114.1) не разрешимо). Для таких задач рассматриваются *обобщенные решения*.

Вектор $z^+ \in V$ называется *псевдорешением* уравнения (114.1), если

$$\|\mathcal{A}z^+ - u\|_E^2 = \inf_{z \in V} \|\mathcal{A}z - u\|_E^2. \tag{114.3}$$

Другими словами, псевдорешение – это вектор пространства V, минимизирующий функционал невязки.

Очевидно, если уравнение (114.1) разрешимо, то псевдорешение совпадает с решением в обычном смысле.

Метод наименьших квадратов. Задача поиска псевдорешения возникает, например, тогда, когда некоторая величина b находится как линейная комбинация величин $a_1, \ldots, a_n$:

$$b = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n,$$

а коэффициенты при x_j должны быть найдены в результате измерения величин a_j и соответствующих значений b. Если при i-м измерении получены значения a_{ij} для величин a_j и значения b_i для величины b, то нужно составить уравнение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i;$$

m измерений приводят к системе m уравнений, которая, вообще говоря, будет несовместной вследствие неизбежных ошибок измерения,

а, может быть, еще из-за того, что величина b не является в точности линейной комбинацией $a_1, \ldots, a_n$, а лишь аппроксимируется ею. Возникает задача определить коэффициенты x_j так, чтобы каждое уравнение удовлетворялось приближенно, но с наименьшей общей погрешностью. Если за меру погрешности взять функционал невязки, то мы и придем к задаче поиска псевдорешения. Описанный прием называется *методом наименьших квадратов.*

Теорема 114.4. *Псевдорешение существует для любого операторного уравнения* (114.1).

Доказательство. Согласно определению (114.3), $\|\mathcal{A}z^+ - u\|_E = \inf\limits_{z\in V} \|\mathcal{A}z - u\|_E = \inf\limits_{z\in V} |\mathcal{A}z - u| = \inf\limits_{z\in V} \rho(\mathcal{A}z, u) = \inf\limits_{y\in \operatorname{im}\mathcal{A}} \rho(y, u)$.

Это означает, что вектор $\mathcal{A}z^+$ – это вектор наилучшего приближения вектора u на $\operatorname{im}\mathcal{A}$. Из теоремы 74.2 следует, что $\mathcal{A}z^+$ – ортогональная проекция вектора u на $\operatorname{im}\mathcal{A}$. Пусть $u = g + h$, где $g \in \operatorname{im}\mathcal{A}$, $h \perp \operatorname{im}\mathcal{A}$. Тогда z^+ является решением в обычном смысле уравнения

$$\mathcal{A}z = g, \tag{114.4}$$

(очевидно, оно имеет решение, так как $g \in \operatorname{im}\mathcal{A}$). ■

Уравнение

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}z = \mathcal{A}^*u \tag{114.5}$$

называется *нормальным уравнением* для уравнения (114.1).

Теорема 114.5. *Вектор z^+ пространства V является псевдорешением уравнения* (114.1) *тогда и только тогда, когда z^+ – решение нормального уравнения* (114.5).

Доказательство. Выше было показано, что z^+ – псевдорешение (114.1) тогда и только тогда, когда z^+ – решение в обычном смысле уравнения (114.4). Покажем, что уравнения (114.4) и (114.5) равносильны. Действительно, $\mathcal{A}^*u = \mathcal{A}^*g$, так как $u = g + h$, где $h \in \operatorname{im}^\perp\mathcal{A} = \ker\mathcal{A}^*$. При этом если z – решение (114.4), то $\mathcal{A}z = g$, поэтому $\mathcal{A}^*\mathcal{A}z = \mathcal{A}^*u$ и z является решением (114.5). Если же z – решение (114.5), то $\mathcal{A}^*\mathcal{A}z = \mathcal{A}^*g$ или $\mathcal{A}^*(\mathcal{A}z - g) = \theta$. Значит, $\mathcal{A}z - g \in \ker\mathcal{A}^* = \operatorname{im}^\perp\mathcal{A}$. Но $\mathcal{A}z \in \operatorname{im}\mathcal{A}$, $g \in \operatorname{im}\mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A}z - g \in \operatorname{im}\mathcal{A}$. Отсюда с учетом соотношения $\mathcal{A}z - g \in \operatorname{im}^\perp\mathcal{A}$, полученного выше, следует, что $\mathcal{A}z - g = \theta$, т.е. z является решением (114.4). ■

Нормальное псевдорешение. Псевдорешение наименьшей длины называется *нормальным псевдорешением.* Из теорем 114.3 и 114.4 следует, что нормальное псевдорешение существует и единственно для любого уравнения (114.1).

Сингулярные базисы оператора $\mathcal{A}$ позволяют получить явные выражения для псевдорешения и нормального псевдорешения.

Пусть $\operatorname{rg}\mathcal{A} = r$, $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ - сингулярные базисы для оператора $\mathcal{A}$, $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_r > 0$ – сингулярные числа.

Разложим псевдорешение z^+ по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$z^+ = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \alpha_n e_n. \tag{114.6}$$

Так как z^+ – решение нормального уравнения (114.5), то, подставив z^+ в это уравнение, получим

$$\alpha_1 \rho_1^2 e_1 + \ldots + \alpha_r \rho_r^2 e_r = \mathcal{A}^* u. \tag{114.7}$$

Из ортонормированности базиса e следует, что

$$\alpha_k \rho_k^2 = (\mathcal{A}^* u, e_k) = (u, \mathcal{A} e_k), \quad k = \overline{1, r}.$$

Учитывая, что $\rho_k^2 = (\mathcal{A} e_k, \mathcal{A} e_k)$, $k = \overline{1, r}$, находим

$$\alpha_k = \frac{(\mathcal{A}^* u, e_k)}{\rho_k^2} = \frac{(u, \mathcal{A} e_k)}{(\mathcal{A} e_k, \mathcal{A} e_k)}, \quad k = \overline{1, r}. \tag{114.8}$$

Таким образом, получен *общий вид псевдорешения* (114.6):

$$z^+ = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ определены соотношением (114.8), а $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ произвольны.

Отсюда следует и *общий вид нормального псевдорешения* z^0:

$$z^0 = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k e_k, \tag{114.9}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ определены соотношением (114.8).

Соотношения (114.9), (114.8) могут быть записаны по-другому:

$$z^0 = \frac{\alpha_1}{\rho_1} \mathcal{A}^* f_1 + \ldots + \frac{\alpha_r}{\rho_r} \mathcal{A}^* f_r$$

или

$$z^0 = \beta_1 \mathcal{A}^* f_1 + \ldots + \beta_r \mathcal{A}^* f_r,$$

где $\beta_k = \dfrac{(u, f_k)}{\rho_k^2}$, $k = \overline{1, r}$, так как $\beta_k = \dfrac{\alpha_k}{\rho_k} = \dfrac{(u, f_k)}{(\rho_k f_k, \rho_k f_k)}$.

Пример. Найдем нормальное псевдорешение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ \sqrt{2} x_1 + \sqrt{2} x_2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Очевидно, что псевдорешение совпадает с решением в обычном смысле и имеет вид $z^+ = (x_1, 1 - x_1)^T$, $\forall x_1$, при этом $z^0 = (1/2, 1/2)^T$

– нормальное решение (при $x_1 = 1/2$ вектор z^+ имеет наименьшую длину).

При вводе в память компьютера данной системы уравнений возможны ошибки представления числа $\sqrt{2}$ рациональным числом. Пусть в памяти компьютера система приобрела вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 1,414x_1 + 1,4142x_2 = 1,415. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\widetilde{z}^0 = (-4,5)^T$, так что приближенное нормальное решение $\widetilde{z}^0$ имеет мало общего с точным нормальным решением z^0: $\|z^0 - \widetilde{z}^0\|_2 = 9\sqrt{2}/2$.

В 1965 г. академиком А.Н.Тихоновым, организатором факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова, был предложен метод нахождения приближенного нормального решения, устойчивого к малым возмущениям исходных данных. Этот метод получил название *метода регуляризации.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проблемы оснований геометрии и обоснования метода координат

§ 1. Аксиомы элементарной геометрии

Будем рассматривать три множества объектов любой природы: объекты первого множества будем называть точками и обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, объекты второго множества будем называть прямыми и обозначать малыми латинскими буквами $a, b, c, \ldots$, объекты третьего множества будем называть плоскостями и обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma \ldots$.

Будем считать, что в рассматриваемых множествах каким-либо способом определены соотношения между объектами, выражаемые тремя терминами: *принадлежит, лежит между* и *конгруэнтен*[1]. Например, точка A принадлежит прямой a или плоскости α; точка B, принадлежащая прямой a, лежит между принадлежащими той же прямой точками A и C; отрезок прямой a, ограниченный принадлежащими этой прямой точками A и B, конгруэнтен отрезку прямой b, ограниченному принадлежащими этой прямой точками C и D.

Будем требовать, чтобы указанные соотношения удовлетворяли формулируемым ниже двадцати аксиомам[2].

Все аксиомы разделяются на пять групп.

Группа I содержит восемь аксиом принадлежности.

Группа II содержит четыре аксиомы порядка.

Группа III содержит пять аксиом конгруэнтности.

Группа IV содержит две аксиомы непрерывности.

Группа V содержит одну аксиому параллельности.

Переходим к формулировке аксиом по группам. Одновременно будем приводить некоторые утверждения, вытекающие из формулируемых аксиом. Это поможет нам выяснить основные принципы логического развертывания геометрии и обосновать возможность установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек прямой и множеством всех вещественных чисел, т.е. обосновать метод координат.

---

[1] То есть "равен".

[2] Во всем остальном как природа самих объектов, так и способ задания соотношений между этими объектами являются произвольными.

1. Аксиомы принадлежности.

I, 1. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, которой принадлежат обе эти точки.*

I, 2. *Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, которой принадлежат эти точки.*

I, 3. *Каждой прямой a принадлежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.*

Указанные три аксиомы исчерпывают список аксиом принадлежности планиметрии. Следующие пять аксиом вместе с указанными тремя аксиомами завершают список аксиом принадлежности стереометрии.

I, 4. *Каковы бы ни были три точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой, существует плоскость α, которой принадлежат эти три точки. Каждой плоскости принадлежит хотя бы одна точка.*

I, 5. *Каковы бы ни были три точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой, существует не более одной плоскости, которой принадлежат эти точки.*

I, 6. *Если две принадлежащие прямой a различные точки A и B принадлежат некоторой плоскости α, то каждая принадлежащая прямой a точка принадлежит указанной плоскости.*

I, 7. *Если существует одна точка A, принадлежащая двум плоскостям α и β, то существует по крайней мере еще одна точка B, принадлежащая этим плоскостям.*

I, 8. *Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.*

С целью использования привычной для нас геометрической терминологии договоримся отождествлять между собой следующие выражения:

1) "точка A принадлежит прямой a (плоскости α)"; 2) "прямая a (плоскость α) проходит через точку A", 3) "точка A лежит на прямой a (на плоскости α)"; 4) "точка A является точкой прямой a (плоскости α)" и т.п.

С помощью указанных аксиом уже могут быть доказаны некоторые теоремы. Так, из аксиомы I, 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Две различные прямые не могут иметь больше одной общей точки.*

Предоставляем читателю доказательство следующих утверждений, вытекающих из аксиом I, 1–8.

Теорема 2. *Две плоскости либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую, на которой лежат все их общие точки.*

Теорема 3. *Плоскость и не лежащая на ней прямая не могут иметь больше одной общей точки.*

Теорема 4. *Через прямую и не лежащую на ней точку или через две различные прямые с общей точкой проходит одна и только одна плоскость.*

Теорема 5. *Каждая плоскость содержит по крайней мере три точки.*

2. Аксиомы порядка.

II, 1. *Если точка B прямой a лежит между точками A и C той же прямой, то A, B и C – различные точки указанной прямой, причем B лежит также и между C и A.*

II, 2. *Каковы бы ни были две различные точки A и C, на определяемой ими прямой существует по крайней мере одна точка B такая, что C лежит между A и B.*

II, 3. *Среди любых трех различных точек одной прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.*

Сформулированные три аксиомы относятся к расположению геометрических объектов на прямой и поэтому называются *линейными аксиомами порядка*. Формулируемая ниже последняя аксиома порядка относится к расположению геометрических объектов на плоскости. Для того чтобы сформулировать эту аксиому, введем понятие отрезка.

Пару различных точек A и B назовем *отрезком* и будем обозначать символом AB или BA. Точки A и B будем называть *концами* отрезка AB. Точки прямой, определяемой A и B, лежащие между A и B, будем называть *внутренними точками* или просто *точками* отрезка AB. Остальные точки указанной прямой будем называть *внешними точками* отрезка AB.

II, 4 (аксиома Паша). *Если A, B и C – три точки, не лежащие на одной прямой, и a – некоторая прямая в плоскости, определяемой этими точками, не содержащая ни одной из указанных точек и проходящая через некоторую точку отрезка AB, то эта прямая проходит также либо через некоторую точку отрезка AC, либо через некоторую точку отрезка BC.*

Подчеркнем, что из одних аксиом порядка II, 1–4 еще не вытекает, что любой отрезок имеет внутренние точки. Однако, привлекая еще аксиомы принадлежности I, 1–3, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 6. *Каковы бы ни были две различные точки A и B, на прямой, ими определяемой, существует по крайней мере одна точка C, лежащая между A и B.*

Предлагаем читателю, опираясь на аксиомы I, 1–8 принадлежности и аксиомы II, 1–4 порядка, последовательно доказать следующие утверждения.

Теорема 7. *Среди любых трех различных точек одной прямой всегда существует одна точка, лежащая между двумя другими.*

Теорема 8. *Если точки A, B и C не принадлежат одной прямой и если некоторая прямая a пересекает*[1] *какие-либо два из отрезков AB, BC и AC, то эта прямая не пересекает третий из указанных отрезков.*

Теорема 9. *Если точка B лежит на отрезке AC, а точка C – на отрезке BD, то точки B и C лежат на отрезке AD.*

Теорема 10. *Если точка C лежит на отрезке AD, а точка B – на отрезке AC, то B лежит также на отрезке AD, а C – на отрезке BD.*

Теорема 11. *Между любыми двумя различными точками прямой существует бесконечно много других ее точек.*

Теорема 12. *Пусть каждая из точек C и D лежит между точками A и B. Тогда если M лежит между C и D, то M лежит и между A и B.*

Теорема 13. *Если точки C и D лежат между точками A и B, то все точки отрезка CD принадлежат отрезку AB* (в этом случае мы будем говорить, что *отрезок CD лежит внутри отрезка AB*).

Теорема 14. *Если точка C лежит между точками A и B, то*: 1) *никакая точка отрезка AC не может быть точкой отрезка CB*, 2) *каждая отличная от C точка отрезка AB принадлежит либо отрезку AC, либо отрезку CB.*

Указанные утверждения позволяют *упорядочить* множество точек любой прямой и выбрать на этой прямой *направление*.

Будем говорить, что две различные точки A и B прямой a *лежат по разные стороны* (*по одну сторону*) от третьей точки O той же прямой, если точка O лежит (не лежит) между A и B. Из указанных выше утверждений вытекает следующая теорема.

Теорема 15. *Произвольная точка O каждой прямой a разбивает все остальные точки этой прямой на два непустых класса так, что любые две точки прямой a, принадлежащие одному и тому же классу, лежат по одну сторону от O, а любые две точки, принадлежащие разным классам, лежат по разные стороны от O.*

Таким образом, задание на любой прямой двух различных точек O и E определяет на этой прямой *луч* или *полупрямую OE*, обладающую тем свойством, что любая ее точка и точка E лежат по одну сторону от O.

Выбрав на прямой a две различные точки O и E, мы можем теперь определить *порядок следования* точек на прямой по следующему правилу: 1) если A и B – любые точки луча OE, то будем говорить, что A *предшествует* B, если A лежит между O и B; 2) будем говорить, что точка O *предшествует* любой точке луча OE; 3) будем говорить, что любая точка прямой, не принадлежащая лучу OE, *предшествует* как точке O, так и любой точке, принадлежащей лучу OE; 4) если A

[1] Под термином "прямая пересекает отрезок" мы подразумеваем, что указанная прямая содержит некоторую внутреннюю точку этого отрезка.

и B – любые точки прямой, не принадлежащие лучу OE, то мы будем говорить, что A *предшествует* B, если B лежит между A и O.

Легко проверить, что для выбранного порядка следования точек прямой a справедливо свойство транзитивности: *если A предшествует B, а B предшествует C, то A предшествует C.*

Аксиомы, приведенные выше, позволяют упорядочить и точки, принадлежащие произвольной плоскости α. Предлагаем читателю доказать следующее утверждение.

Теорема 16. *Каждая прямая a, принадлежащая плоскости α, разделяет не лежащие на ней точки этой плоскости на два непустых класса так, что любые две точки A и B из разных классов определяют отрезок AB, содержащий точку прямой a, а любые две точки A и A' из одного класса определяют отрезок AA', внутри которого не лежит ни одна точка прямой a.*

В соответствии с утверждением этой теоремы мы будем говорить, что точки A и A' (одного класса) *лежат в плоскости α по одну сторону от прямой a*, а точки A и B (разных классов) *лежат в плоскости α по разные стороны от прямой a.*

3. Аксиомы конгруэнтности.

III, 1. *Если A и B – две точки на прямой a, A' – точка на той же прямой или на другой прямой a', то по данную от точки A' сторону прямой a' найдется, и притом только одна, точка B' такая, что отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку AB. Каждый отрезок AB конгруэнтен отрезку[1] BA.*

III, 2. *Если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB, то они конгруэнтны и между собой.*

III, 3. *Пусть AB и BC – два отрезка прямой a, не имеющие общих внутренних точек, $A'B'$ и $B'C'$ – два отрезка той же прямой или другой прямой a', также не имеющие общих внутренних точек. Тогда если отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$, а отрезок BC конгруэнтен отрезку $B'C'$, то отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'C'$.*

Сформулированные три аксиомы относятся к конгруэнтности отрезков. Для формулировки двух следующих аксиом нам понадобится понятие *угла* и его *внутренних точек*.

Пара полупрямых h и k, выходящих из одной и той же точки O и не лежащих на одной прямой, называется *углом* и обозначается символом $\angle(h,k)$ или $\angle(k,h)$.

Если полупрямые h и k задаются двумя своими точками OA и OB, то мы будем обозначать угол символом $\angle AOB$ или $\angle BOA$.

---

[1] Из этой аксиомы вытекает возможность перемещения отрезка AB вдоль прямой, на которой он лежит (с сохранением его длины и направления). Будем говорить, что *направленный отрезок $\overline{CD}$ получен в результате перемещения направленного отрезка $\overline{AB}$*, если отрезок CD конгруэнтен отрезку AB и если либо отрезок AD лежит внутри отрезка BC, либо отрезок BC лежит внутри отрезка AD.

В силу теоремы 4 любые два луча h и k, составляющие угол $\angle(h,k)$, определяют, и притом единственную, плоскость α.

Внутренними точками угла $\angle(h,k)$ будем называть те точки плоскости α, которые, во-первых, лежат по ту же сторону от прямой, содержащей луч h, что и любая точка луча k, и, во-вторых, лежат по ту же сторону от прямой, содержащей луч k, что и любая точка луча h.

III, 4. *Пусть даны угол $\angle(h,k)$ на плоскости α, прямая a' на этой же или на какой-либо другой плоскости α' и задана определенная сторона плоскости α' относительно прямой a'. Пусть h' – луч прямой a', исходящий из некоторой точки O'. Тогда на плоскости α' существует один и только один луч k' такой, что $\angle(h,k)$ конгруэнтен $\angle(h',k')$, и при этом все внутренние точки $\angle(h',k')$ лежат по заданную сторону от прямой a'. Каждый угол конгруэнтен самому себе.*

III, 5. *Пусть A, B и C – три точки, не лежащие на одной прямой, A', B' и C' – другие три точки, также не лежащие на одной прямой. Тогда если отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$, отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'C'$ и $\angle BAC$ конгруэнтен $\angle B'A'C'$, то $\angle ABC$ конгруэнтен $\angle A'B'C'$ и $\angle ACB$ конгруэнтен $\angle A'C'B'$.*

Договоримся теперь о сравнении неконгруэнтных отрезков и углов.

Будем говорить, что отрезок AB *больше* отрезка $A'B'$, если на прямой, определяемой точками A и B, найдется лежащая между этими точками точка C такая, что отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'B'$. Будем говорить, что отрезок AB *меньше* отрезка $A'B'$, если отрезок $A'B'$ больше отрезка AB.

Тот факт, что отрезок AB меньше отрезка $A'B'$ (конгруэнтен отрезку $A'B'$), символически будем записывать так:

$$AB < A'B' \quad (AB = A'B').$$

Будем говорить, что $\angle AOB$ *больше* $\angle A'O'B'$, если в плоскости, определяемой $\angle AOB$, найдется луч OC, все точки которого являются внутренними точками $\angle AOB$, такой, что $\angle AOC$ конгруэнтен $\angle A'O'B'$. Будем говорить, что $\angle AOB$ *меньше* $\angle A'O'B'$, если $\angle A'O'B'$ больше $\angle AOB$.

С помощью аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности можно доказать целый ряд классических теорем элементарной геометрии. Сюда относятся: 1) три широко известные теоремы о конгруэнтности (равенстве) двух треугольников; 2) теорема о конгруэнтности вертикальных углов; 3) теорема о конгруэнтности всех прямых углов; 4) теорема о единственности перпендикуляра, опущенного из точки на прямую; 5) теорема о единственности перпендикуляра, восставленного из данной точки прямой; 6) теорема о внешнем угле треугольника; 7) теорема о сравнении перпендикуляра и наклонной.

Предлагаем читателю самому последовательно доказать только что перечисленные теоремы.

4. Аксиомы непрерывности. С помощью аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности мы произвели сравнение отрезков, позволяющее заключить, каким из трех знаков $<, =$ или $>$ связаны данные два отрезка.

Указанных аксиом, однако, недостаточно: 1) для обоснования возможности измерения отрезков, позволяющего поставить в соответствие каждому отрезку определенное вещественное число; 2) для обоснования того, что указанное соответствие является взаимно однозначным.

Для проведения такого обоснования следует присоединить к аксиомам I, II, III две аксиомы непрерывности.

IV, 1 (аксиома Архимеда). *Пусть AB и CD – произвольные отрезки. Тогда на прямой, определяемой точками A и B, существует конечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расположенных так, что точка A_1 лежит между A и A_2, точка A_2 лежит между A_1 и $A_3, \ldots$, точка A_{n-1} лежит между A_{n-2} и A_n, причем отрезки AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и точка B лежит между A и A_n.*

IV, 2 (аксиома линейной полноты). *Совокупность всех точек произвольной прямой a нельзя пополнить новыми объектами (точками) так, чтобы: 1) на пополненной прямой были определены соотношения "лежит между" и "конгруэнтен", определен порядок следования точек и справедливы аксиомы конгруэнтности* III, 1–3 *и аксиома Архимеда* IV, 1*; 2) по отношению к прежним точкам прямой определенные на пополненной прямой соотношения "лежит между" и "конгруэнтен" сохраняли старый смысл.*

Мы сейчас докажем, что присоединение к аксиомам I, 1–3, II и III, 1–3 аксиомы Архимеда IV, 1 позволяет поставить в соответствие каждой точке произвольной прямой a определенное вещественное число x, называемое координатой этой точки, а присоединение еще и аксиомы линейной полноты IV, 2 позволяет утверждать, что координаты всех точек прямой a исчерпывают множество всех вещественных чисел.

5. Обоснование метода координат. Прервем на время изложение аксиом геометрии, чтобы на основании уже изложенных аксиом дать обоснование метода координат на прямой.

Сначала докажем следующее утверждение.

Первая основная теорема. *Аксиомы* I, 1–3, II, III, 1–3 *и аксиома* IV, 1 *Архимеда позволяют ввести на любой прямой a координаты так, что выполнены следующие требования:*

1°. *Каждой точке M прямой a соответствует определенное вещественное число x, называемое ее координатой.*

2°. *Разным точкам соответствуют разные координаты, причем точка M_2 лежит между M_1 и M_3 тогда и только тогда, когда либо $x_1 < x_2 < x_3$, либо $x_1 > x_2 > x_3$* (здесь x_1, x_2 и x_3 – координаты точек M_1, M_2 и M_3 соответственно).

3°. *Отрезки M_1M_2 и $M_1'M_2'$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$* (здесь x_1, x_2, x_1' и x_2' – координаты точек M_1, M_2, M_1' и M_2' соответственно).

4°. *Если вещественные числа x_1 и x_2 представляют собой координаты некоторых точек, то и вещественное число $x_1 \pm x_2$ представляет собой координату некоторой точки.*

Доказательство. Выберем на прямой a произвольную точку O в качестве начала координат и произвольную отличную от O точку E в качестве точки с координатой единица. Пусть M – произвольная точка прямой a. Для определенности предположим, что M лежит с той же стороны от O, что и E (аксиомы I, 1–3, II и III, 1–3 обеспечивают возможность установления порядка следования точек на прямой a. Каковы бы ни были целое положительное число n и целое неотрицательное число m, мы можем, откладывая отрезок OM в одном и том же направлении последовательно n раз, построить отрезок $n \cdot OM$ и аналогично построить отрезок $m \cdot OE$ (возможность откладывать конгруэнтный отрезок в любом направлении и строить сумму конгруэнтных отрезков, не имеющих общих внутренних точек, вытекает из аксиом I, 1–3, II и III, 1–3).

В силу только что упомянутых аксиом любые два отрезка мы можем сравнивать. Следовательно, и отрезки $n \cdot OM$ и $m \cdot OE$ при различных n и m будут связаны либо знаком $<$, либо знаком $\geq$.

Рассмотрим все возможные рациональные числа m/n. Их можно разбить на два класса, относя к *верхнему классу* те из них, для которых

$$n \cdot OM < m \cdot OE, \tag{П.1}$$

и к *нижнему классу* те, для которых

$$n \cdot OM \geq m \cdot OE. \tag{П.2}$$

Убедимся в том, что эти два класса однозначно определяют вещественное число x, которое мы и поставим в соответствие точке M и назовем ее *координатой*.

Сначала убедимся в том, что *любое рациональное число из верхнего класса больше любого рационального числа из нижнего класса.* Приведя любые два рациональных числа из разных классов к общему знаменателю и обозначая последний через n, мы из (П.1) и (П.2) получим, что числитель числа из верхнего класса больше числителя числа из нижнего класса. Отсюда и вытекает, что число из верхнего класса больше числа из нижнего класса.

Далее заметим, что *оба класса не являются пустыми*: нижнему классу заведомо принадлежит рациональное число нуль, а для установления непустоты верхнего класса достаточно положить $n = 1$ и заметить, что аксиома Архимеда IV, 1 гарантирует существование такого натурального числа m, что при $n = 1$ справедливо неравенство (П.1).

В силу теоремы о точных гранях непустого ограниченного сверху (снизу) множества[1] существует точная верхняя грань $\underline{x}$ рациональных чисел нижнего класса и точная нижняя грань $\bar{x}$ рациональных чисел верхнего класса.

Убедимся в том, что эти грани $\underline{x}$ и $\bar{x}$ *заключены между как угодно близкими рациональными числами и поэтому совпадают.* Достаточно доказать, что *существуют как угодно близкие числа разных классов*, а это вытекает из того, что для как угодно большого номера n найдется номер m такой, что рациональное число $(m+1)/n$ принадлежит верхнему классу, а рациональное число m/n принадлежит нижнему классу[2].

Положим теперь $x = \underline{x} = \bar{x}$ и поставим вещественное число x в соответствие точке M, назвав его координатой этой точки. Требование 1° обосновано.

Пусть теперь M_1 и M_2 – какие угодно две точки, лежащие по ту же сторону от O, что и E, и такие, что M_1 лежит между O и M_2, т.е. $OM_2 > OM_1$. Докажем, что если x_1 и x_2 – координаты точек M_1 и M_2 соответственно, то $x_2 > x_1$.

Выберем номер n настолько большим, чтобы разность отрезков OM_2 и OM_1, повторенная n раз, превзошла отрезок OE (это можно сделать в силу все той же аксиомы Архимеда IV, 1). Тогда, обозначая через m *наибольшее* целое число, для которого

$$n \cdot OM_1 \geq m \cdot OE,$$

мы получим, что

$$n \cdot OM_1 < (m+1) \cdot OE, \tag{П.3}$$

и в силу сделанного выше выбора номера n

$$n \cdot OM_2 > (m+1) \cdot OE. \tag{П.4}$$

Из (П.3) заключаем, что рациональное число $(m+1)/n$ относится к верхнему классу по отношению к точке M_1, т.е. $(m+1)/n \geq x_1$, а из (П.4) заключаем, что то же самое рациональное число $(m+1)/n$ относится к нижнему классу по отношению к точке M_2, и поэтому $x_2 > (m+1)/n$. Тем самым неравенство $x_2 > x_1$ доказано.

Если теперь мы имеем на прямой a какое угодно число точек, идущих в порядке $O, M_1, M_2, \ldots, M_n$ (в сторону[3] E), то из только что доказанного утверждения для координат этих точек получим $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Тем самым для случая расположения точек по ту же сторону от O, что и E, требование 2° доказано. Для точек M, лежащих на прямой a по другую сторону от O, аналогично вводятся отрицательные

[1] См. например, основную теорему 2.1 из [11], ч. I.

[2] Тот факт, что для любого номера n найдется указанный номер m (такой, что справедливо (П.1)), снова вытекает из аксиомы Архимеда IV, 1.

[3] В дальнейшем эта сторона именуется положительной.

координаты и повторением тех же рассуждений мы устанавливаем требования 1° и 2° в общем виде.

Для установления требований 3° и 4° мы сначала докажем, что *если на прямой a в положительную сторону от O взяты точки M_1, M_2 и M, причем M_1 лежит между O и M и отрезки M_1M и OM_2 конгруэнтны, то $x = x_1 + x_2$* (здесь x, x_1 и x_2 – координаты точек M, M_1 и M_2 соответственно).

Возьмем из нижних классов, отвечающих координатам x_1 и x_2, два *произвольных* рациональных числа, обозначив их (после приведения к общему знаменателю n) соответственно через m_1/n и m_2/n. Тогда

$$n \cdot OM_1 \geq m_1 \cdot OE, \quad n \cdot OM_2 \geq m_2 \cdot OE.$$

Складывая последние два неравенства, получим

$$n \cdot OM \geq (m_1 + m_2) \cdot OE. \tag{П.5}$$

Точнее говоря, в левой части (П.5) мы получим сумму n раз отложенного отрезка OM_1 и n раз отложенного отрезка OM_2, но после перегруппировки слагаемых мы и получим n раз повторенную сумму отрезков OM_1 и OM_2, т.е.[1] $n \cdot OM$.

Из неравенства (П.5) заключаем, что рациональное число $\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$ принадлежит н и ж н е м у классу, отвечающему координате x.

Аналогично, взяв *любые* рациональные числа m_1/n и m_2/n из *верхних* классов, отвечающих координатам x_1 и x_2, мы убедимся в том, что рациональное число $\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$ принадлежит *верхнему* классу, отвечающему координате x.

Но тогда из определения суммы вещественных чисел и из того, что рациональные числа как из верхнего, так и из нижнего классов как угодно точно приближают соответствующую координату, мы получим, что вещественное число x равно сумме $x_1 + x_2$.

Тем самым нами доказано, что *отложить от точки M_1 с координатой x_1 (в положительную сторону) отрезок OM_2 – это все равно, что построить точку M с координатой x, удовлетворяющей условию $x = x_1 + x_2$, где $x_2 > 0$ – координата точки M_2.*

Это утверждение мы доказали для случая $x_1 > 0$, но легко распространить его и на общий случай (предоставляем это читателю). Из доказанного утверждения сразу же вытекает требование 4°, а для доказательства утверждения 3° достаточно заметить, что откладывание данного отрезка равносильно добавлению к координате точки постоянного слагаемого. Первая основная теорема полностью доказана[2]. ■

[1] То, что в геометрической сумме отрезков мы можем, не меняя суммы, переставлять слагаемые, вытекает из следующих соображений. Достаточно убедиться в возможности перестановки для двух слагаемых, а это непосредственно вытекает из аксиомы III, 3, в формулировке которой ничего не сказано о порядке, в котором "приставляются" друг к другу слагаемые отрезки $A'B'$ и $B'C'$. При любом их порядке сумма $A'C'$ конгруэнтна отрезку AC.

[2] Подчеркнем, что при доказательстве первой основной теоремы аксиомы I, 1–3 и II *использовались лишь для установления порядка следования точек на прямой.*

Замечание. Особо подчеркнем, что в первой основной теореме *не утверждается*, что каждому вещественному числу x соответствует определенная точка на прямой (т.е. не утверждается, что соответствие между точками прямой и вещественными числами является взаимно однозначным).

Мы сейчас увидим, что это невозможно доказать, опираясь только на аксиомы I, 1–3, II, III, 1–2 и IV, 1 и не привлекая аксиому линейной полноты IV, 2.

Вторая основная теорема. *Пусть справедливы аксиома* I, 1–3, II, III, 1-3, IV, 1 *и на прямой a введены координаты. Тогда, для того чтобы каждому вещественному числу x отвечала некоторая точка прямой a, т.е. для того чтобы между всеми точками прямой a и всеми вещественными числами существовало взаимно однозначное соответствие, необходимо и достаточно, чтобы была справедлива аксиома линейной полноты* IV, 2.

Доказательство. Достаточность. Докажем, что если существуют вещественные числа x, которым не отвечает никакая точка прямой a, то аксиома IV, 2 заведомо несправедлива.

Пусть существуют указанные вещественные числа x. Каждое из них мы назовем *новой точкой* и присоединим все новые точки к совокупности прежних точек прямой a.

На пополненной прямой (назовем ее $\tilde{a}$) уже каждому вещественному числу отвечает точка, и обратно.

Определим на $\tilde{a}$ соотношения "лежит между" и "конгруэнтен". Будем говорить, что точка M_2 прямой a *лежит между* M_1 и M_3, если либо $x_1 < x_2 < x_3$, либо $x_1 > x_2 > x_3$, где под x_1, x_2 и x_3 нужно понимать координату соответствующей точки M_1, M_2 и M_3, если эта точка прежняя, и саму эту точку, если она новая. Очевидно, что в применении к прежним точкам определенное на $\tilde{a}$ соотношение "лежит между" сохраняет старый смысл.

Будем говорить, что отрезок M_1M_2 прямой $\tilde{a}$ *конгруэнтен* отрезку той же прямой $M_1'M_2'$, если $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, где под x_1, x_2, x_1' и x_2' нужно понимать координату соответствующей точки M_1, M_2, M_1' и M_2', если эта точка прежняя, и саму эту точку, если она новая. Снова очевидно, что в применении к прежним точкам определенное на $\tilde{a}$ соотношение "конгруэнтен" сохраняет старый смысл.

Очевидно также, что для точек пополненной прямой $\tilde{a}$ определен порядок следования и справедливы аксиомы конгруэнтности III, 1–3 и аксиома Архимеда IV, 1.

Тем самым мы установили возможность пополнения прямой, противоречащую аксиоме линейной полноты IV, 2.

Достаточность доказана.

Необходимость. Докажем, что если аксиома линейной полноты IV, 2 не имеет места, то координаты всех точек прямой a не исчерпывают всех вещественных чисел.

Если аксиома IV, 2 не имеет места, то существует пополненная новыми точками прямая $\tilde{a}$, для всех точек которой определены соотношения "лежит между" и "конгруэнтен", определен порядок следования и справедливы аксиомы конгруэнтности III, 1-3 и аксиома Архимеда IV, 1. В силу первой основной теоремы на пополненной прямой $\tilde{a}$ можно ввести координаты (в этой теореме аксиомы I, 1–3 и II использовались лишь в форме возможности установления на данной прямой порядка следования точек).

Мы получили, что каждой точке пополненной прямой $\tilde{a}$ отвечает определенное вещественное число, причем разным точкам отвечают различные вещественные числа. Но отсюда следует, что те вещественные числа, которые отвечают точкам, производящим пополнение, не будут соответствовать ни одной точке исходной прямой a. Необходимость доказана. ■

6. Аксиома параллельности. Самая последняя аксиома играет в геометрии фундаментальную роль, определяя разделение геометрии на две логически непротиворечивые и взаимно исключающие друг друга системы: евклидову и неевклидову геометрии.

В геометрии Евклида эта аксиома формулируется так:

V. *Пусть a — произвольная прямая и A — точка, лежащая вне прямой a, тогда в плоскости α, определяемой точкой A и прямой a, существует не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей A.*

Долгое время геометры выясняли вопрос о том, не является ли аксиома параллельности V следствием всех остальных аксиом I, II, III, IV. Этот вопрос был решен Н.И. Лобачевским[1], который доказал, что аксиома V не является следствием аксиом I–IV.

По-другому результат Лобачевского можно сформулировать так: *если к аксиомам* I–IV *присоединить утверждение, отрицающее справедливость аксиомы V, то следствия всех этих положений будут составлять логически непротиворечивую систему (неевклидову геометрию Лобачевского).*

Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского излагается в §3 настоящего Приложения.

Здесь же мы отметим, что систему следствий, вытекающих из одних только аксиом I–IV, обычно называют *абсолютной геометрией.* Абсолютная геометрия является общей частью как евклидовой, так и неевклидовой геометрий, ибо все предложения, которые могут быть доказаны только с помощью аксиом I–IV, верны как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского (примеры таких предложений читатель найдет в предыдущих пунктах).

[1] Николай Иванович Лобачевский – великий русский математик (1793–1856).

§ 2. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Евклида

Наметим схему доказательства непротиворечивости всех пяти групп аксиом геометрии Евклида.

Для простоты ограничимся доказательством непротиворечивости планиметрии Евклида, т.е. установим непротиворечивость системы аксиом I, 1–3, II–V.

Для доказательства достаточно построить какую-нибудь конкретную реализацию совокупности объектов, удовлетворяющих всем указанным аксиомам.

Мы построим так называемую *декартову* или *арифметическую* реализацию совокупности объектов, удовлетворяющих аксиомам планиметрии. Тем самым вопрос о непротиворечивости планиметрии Евклида будет сведен к вопросу о непротиворечивости арифметики.

Назовем *точкой* любую упорядоченную пару вещественных чисел (x, y), а *прямой* – отношение трех вещественных чисел[1] $(u : v : w)$ при условии, что $u^2 + v^2 \neq 0$.

Будем говорить, что точка (x, y) *принадлежит прямой* $(u : v : w)$, если справедливо равенство

$$ux + vy + w = 0. \tag{П.6}$$

Докажем справедливость аксиом I, 1–3.

Каковы бы ни были две различные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), прямая[2] $((y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1y_2 - x_2y_1))$, как легко убедиться, *содержит эти точки* (аксиома I, 1).

Далее из уравнений

$$ux_1 + vy_1 + w = 0, \quad ux_2 + vy_2 + w = 0$$

вытекает, что $u : v : w = (y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1y_2 - x_2y_1)$, так что точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяется *только одна* прямая $(u : v : w)$ (аксиома I, 2).

Наконец, справедливость аксиомы I, 3 вытекает из того, что уравнение (П.6) с двумя неизвестными x и y всегда имеет бесчисленное множество решений и не всякая пара x и y есть решение уравнения (П.6).

Теперь определим соотношение "лежит между". Так как $u^2+v^2 \neq 0$, то либо $u \neq 0$, либо $v \neq 0$.

Если $v \neq 0$, то будем говорить, что точка (x_2, y_2) *лежит между* (x_1, y_1) и (x_3, y_3), если либо $x_1 < x_2 < x_3$, либо $x_1 > x_2 > x_3$. Если же $v = 0$ (при этом заведомо $u \neq 0$), то будем говорить, что точка

[1] Отношением $(u : v : w)$ называется совокупность трех вещественных чисел u, v, w при условии, что при любом $\lambda \neq 0$ совокупности u, v, w и $\lambda u, \lambda v, \lambda w$ рассматриваются как тождественные.

[2] Так как точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) различны, то $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \neq 0$.

(x_2, y_2) *лежит между* (x_1, y_1) и (x_3, y_3), если либо $y_1 < y_2 < y_3$, либо $y_1 > y_2 > y_3$.

Справедливость аксиом II, 1–3 проверяется тривиально. Несколько кропотливую проверку аксиомы Паша II, 4 мы опустим.

Обратимся теперь к определению соотношения "конгруэнтен". С этой целью рассмотрим так называемое *ортогональное преобразование*. Преобразование

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2, \tag{П.7}$$

переводящее произвольную точку (x, y) в определенную точку (x', y'), называется *ортогональным*, если выполнены соотношения

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \tag{П.8}$$

Легко доказать, что всякое ортогональное преобразование (П.7), (П.8) можно представить в одной из следующих форм: либо в виде

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1, \quad y' = \beta x + \alpha y + c_2, \tag{П.9}$$

либо в виде

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1, \quad y' = \beta x - \alpha y + c_2, \tag{П.10}$$

причем в обоих случаях $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Преобразования (П.9) и (П. 10) обычно называют *ортогональными преобразованиями* соответственно *первого* и *второго рода*.

Пусть даны произвольная прямая $(u : v : w)$ и на ней некоторая точка (x_0, y_0), так что $ux_0 + vy_0 + w = 0$.

Легко убедиться в том, что совокупность точек (x, y), где

$$x = x_0 + vt, \quad y = y_0 - ut, \tag{П.11}$$

принадлежит прямой $(u : v : w)$ для любого вещественного числа t. Далее ясно, что при $t > 0$ все указанные точки (x, y) лежат по одну сторону от точки (x_0, y_0), а при $t < 0$ эти точки лежат по другую сторону от (x_0, y_0).

Иными словами, уравнения (П. 11) при всевозможных положительных t определяют все точки полупрямой, исходящей из точки (x_0, y_0) и лежащей на прямой $(u : v : w)$. Эту полупрямую мы будем обозначать символом $(x_0, y_0, v, -u)$.

Оказывается, всякое ортогональное преобразование (как первого, так и второго рода) переводит любую полупрямую снова в полупрямую. Более точно, справедливо следующее утверждение: *ортогональное преобразование* (П.9) *или* (П.10) *переводит полупрямую* $(x_0, y_0, v, -u)$ *в полупрямую* $(x_0', y_0', v', -u')$, *где для случая преобразования* (П.9)

$$x_0' = \alpha x_0 - \beta y_0 + c_1, \quad y_0' = \beta x_0 + \alpha y_0 + c_2,$$

$$v' = \alpha v + \beta u, \quad u' = -\beta v - \alpha u,$$

и для случая преобразования (П.10)

$$x_0' = \alpha x_0 + \beta y_0 + c_1, \quad y_0' = \beta x_0 - \alpha y_0 + c_2,$$

$$v' = \alpha v - \beta u, \quad u' = -\beta v - \alpha u.$$

Теперь назовем отрезок AB *конгруэнтным* отрезку $A'B'$, если существует ортогональное преобразование, которое переводит точку A в точку A', а точку B в точку B'. Угол $\angle(h,k)$ назовем *конгруэнтным* углу $\angle(h',k')$, если существует ортогональное преобразование, переводящее полупрямую h в полупрямую h' и полупрямую k в полупрямую k'.

Далее нужно перейти к проверке аксиом III, 1–5. Аксиома III, 2 вытекает из групповых свойств ортогонального преобразования, в силу которых как последовательное проведение двух ортогональных преобразований, так и преобразование, обратное к ортогональному, снова являются ортогональными преобразованиями. Проверка остальных аксиом группы III требует кропотливой техники и использования указанного выше утверждения, и мы ее опустим.

Что же касается аксиом непрерывности, то аксиома Архимеда IV, 1 проверяется непосредственно, а справедливость аксиомы полноты IV, 2 вытекает из того, что между всеми точками любой прямой и всеми вещественными числами можно установить взаимно однозначное соответствие (см. вторую основную теорему из п. 5 §1).

Нам остается еще проверить справедливость аксиомы параллельности V. Пусть $(u : v : w)$ – произвольная прямая и (x_0, y_0) – точка вне ее, так что $ux_0 + vy_0 + w \neq 0$.

Пусть $(u' : v' : w')$ – прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), т.е. удовлетворяющая условию

$$u'x_0 + v'y_0 + w' = 0. \tag{П.12}$$

Поскольку эта прямая не пересекает прямую $(u : v : w)$, должна быть несовместна система уравнений

$$u'x + v'y + w' = 0, \quad ux + vy + w = 0. \tag{П.13}$$

Из несовместности системы (П.13) заключаем, что $u' : u = v' : v$, или, что то же самое, $u' = \lambda u$, $v' = \lambda v$, где λ – некоторое число. Но тогда из (П.12) получим $w' = -\lambda(ux_0 + vy_0)$, т.е. $u' : v' : w' = u : v : -(ux_0 + vy_0)$. Итак, отношения $u' : v' : w'$ однозначно определены, т.е. существует единственная прямая $(u' : v' : w')$, проходящая через (x_0, y_0) и не пересекающая прямую $(u : v : w)$.

Тем самым доказательство непротиворечивости планиметрии Евклида завершено.

Замечание. Аналогично доказывается непротиворечивость стереометрии Евклида. Для этого мы называем

точкой любую упорядоченную тройку вещественных чисел (x, y, z); *прямой* – совокупность всех троек (x, y, z), элементы x, y, z которых связаны системой двух линейных уравнений; *плоскостью* – совокупность всех троек (x, y, z), элементы x, y, z которых удовлетворяют одному линейному уравнению.

§ 3. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского

Для простоты ограничимся доказательством непротиворечивости планиметрии Лобачевского, т.е. построим конкретную реализацию совокупности объектов, удовлетворяющих аксиомам I, 1–3, I–IV и аксиоме, отрицающей справедливость аксиомы V. Для построения указанной реализации мы будем опираться на уже установленную нами непротиворечивость планиметрии Евклида, т.е. сведем вопрос о непротиворечивости планиметрии Лобачевского к вопросу о непротиворечивости планиметрии Евклида. Излагаемая в этом параграфе модель принадлежит А. Пуанкаре[1].

Рассмотрим на евклидовой плоскости горизонтальную прямую x и опирающуюся на нее *верхнюю* полуплоскость.

Все точки этой верхней полуплоскости мы назовем *неевклидовыми точками*, а все лежащие в верхней полуплоскости полуокружности с центром на прямой x и все вертикальные полупрямые, исходящие из точек прямой x, назовем *неевклидовыми прямыми* (кстати, указанные полупрямые удобно рассматривать как полуокружности бесконечно большого радиуса).

Между неевклидовыми точками и неевклидовыми прямыми определим соотношения "принадлежит", "лежит между" и "конгруэнтен" и убедимся в справедливости всех аксиом абсолютной геометрии (т.е. аксиом I, 1–3, II–IV). После этого мы покажем, что в построенной модели справедлива аксиома параллельности Лобачевского (т.е. отрицание аксиомы V Евклида).

Мы будем говорить, что неевклидова точка A *принадлежит* неевклидовой прямой a, если точка верхней полуплоскости A лежит на полуокружности a.

Справедливость аксиом I, 1–3 устанавливается тривиально. Так, аксиомы I, 1 и I, 2 эквивалентны утверждению, что через две точки верхней полуплоскости можно провести только одну окружность, имеющую центр на прямой x. Аксиома I, 3 эквивалентна утверждению, что на любой полуокружности имеются по крайней мере две точки и имеется хотя бы одна точка вне этой полуокружности.

Перейдем к установлению соотношения "лежит между". Пусть A, B, C – три точки неевклидовой прямой, изображаемой полуокружностью a. Будем говорить, что *точка* B (в неевклидовом смысле)

[1] Анри Пуанкаре – французский математик (1854–1912).

лежит между A и C, если B на полуокружности a лежит между A и C (в евклидовом смысле).

При таком определении соотношения "лежит между" легко устанавливается справедливость аксиом II, 1–3. Впрочем, порядку следования точек на неевклидовой прямой, изображаемой полуокружностью a, можно придать и более наглядный вид. Проведя из центра O полуокружности a всевозможные лучи, мы с помощью этих лучей можем взаимно однозначно спроецировать все точки полуокружности a на все точки некоторой прямой y, параллельной x и лежащей выше полуокружности a.

Тогда порядок следования точек неевклидовой прямой a соответствует порядку следования образов этих точек на прямой y. Попутно докажем, что *все точки любой неевклидовой прямой* a *находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством всех вещественных чисел.*

Нам еще следует проверить аксиому II, 4 Паша, но доказательство этой аксиомы является наглядно вполне очевидным, и мы его опустим.

Теперь мы перейдем к определению соотношения "конгруэнтен". В надлежащем его определении и состоит остроумие модели Пуанкаре. Не вдаваясь в детали, остановимся на основных идеях определения этого соотношения.

Введем в рассмотрение специальное преобразование евклидовой плоскости, известное под названием *инверсии*. Пусть фиксирована произвольная окружность радиуса r с центром в точке A. *Инверсией относительно указанной окружности* называется такое преобразование точек плоскости, при котором любая отличная от A точка плоскости M переходит в точку M', лежащую на одном с точкой M луче, выходящем из A, и такую, что выполнено условие $AM' \cdot AM = r^2$.

Назовем неевклидов отрезок AB *конгруэнтным* неевклидову отрезку $A'B'$, если существует такая последовательность инверсий, что их произведение отображает евклидову круговую дугу AB в круговую дугу $A'B'$.

Неевклидовым углом будем называть совокупность двух неевклидовых полупрямых, исходящих из одной точки.

Назовем неевклидов угол $\angle(h', k')$ *конгруэнтным* неевклидову углу $\angle(h, k)$, если существует такая последовательность инверсий, что их произведение отображает стороны первого угла на стороны второго.

После принятых определений проверка аксиом конгруэнтности III, 1–5 превращается в техническую работу, которую мы можем опустить.

Проверка аксиомы Архимеда IV, 1 также не вызывает никаких трудностей и использует лишь свойства инверсий.

Последняя аксиома абсолютной геометрии – аксиома полноты IV, 2 справедлива вследствие того, что (как это установлено выше) между всеми точками любой "неевклидовой прямой" и всеми вещественны-

ми числами можно установить взаимно однозначное соответствие (см. вторую основную теорему из п. 5 §1).

Итак, для рассматриваемой модели справедливы все аксиомы абсолютной геометрии (I, 1–3, II–IV).

Как же обстоит дело с аксиомой параллельности V? Возьмем любую "неевклидову прямую", изображаемую полуокружностью a, и любую точку A, ей не принадлежащую. Легко проверить, что через точку A проходит *бесконечно много* различных полуокружностей, имеющих центры на прямой x и не имеющих общих точек с полуокружностью a.

Это означает, что в рассматриваемой нами модели справедлива аксиома параллельности Лобачевского.

Тем самым мы завершили доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского и одновременно показали, что аксиома параллельности V Евклида не является следствием аксиом I, 1–3, II–IV абсолютной геометрии.

§ 4. Заключительные замечания о проблемах аксиоматики

При изучении любой системы аксиом естественно возникают следующие три проблемы: 1) проблема непротиворечивости системы аксиом; 2) проблема минимальности системы аксиом (выясняющая вопрос о том, не является ли каждая из рассматриваемых аксиом следствием остальных); 3) проблема полноты системы аксиом (принято систему аксиом называть *полной*, если между элементами двух любых ее реализации можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее установленные между элементами соотношения).

В §3 и 4 мы установили непротиворечивость системы аксиом как геометрии Евклида, так и геометрии Лобачевского.

Проблема минимальности системы аксиом геометрии является очень трудоемкой и требует обстоятельного исследования. Примером такого исследования является установленный нами факт, что аксиома параллельности V не является следствием остальных аксиом.

Полнота системы аксиом геометрии устанавливается посредством введения для любой реализации координатной системы и последующего установления взаимно однозначного соответствия (с сохранением всех соотношений) между точками, прямыми и плоскостями данной реализации (в координатной записи) и декартовой реализации, изученной в §2.

Предметный указатель

Аксиомы группы 135
– кольца 149
– линейного пространства 62, 207
– нормы 342
– расстояния 227
– скалярного произведения 224
– элементарной геометрии 54, 370
Алгебра над полем P 250
– линейных операторов 250
Алгебраическая операция 50
– ассоциативная 50
– коммутативная 50
Алгебраическое дополнение 31
Аппроксимация оператора (матрицы) 363
Арифметическое пространство 62, 207
Ассоциативность обобщенная 51
Аффинное пространство 208

База системы векторов 210
Базис 76, 211
– естественный 212
– жорданов 275, 277
– канонический 275
– ортонормированный 86, 90, 229
– Шура 289
Базисные строки (столбцы) 71
Базисный минор 71
Безу теорема 170
Билинейная форма 308
– – вырожденная 310
– – от переменных 309
– – полярная 310
– – симметричная 308
Билинейной формы матрица 309
– – ранг 310
Биортогональная пара базисов 287
Биортогональные системы векторов 287

Вариационные свойства сингулярных чисел 359
– – собственных значений 358
Ведущий элемент 22
Вектор 57, 63
– единичный 21
– корневой 270
– направляющий 117, 118
– нормали 121
– присоединенный 270
– свободный 57
– собственный 256
Вектор-столбец 16
Вектор-строка 16
Вектора длина 55, 58, 226
– величина 57
– координаты 78, 83
– проекция 86, 87, 234
– разложение по подпространствам 216
Векторное произведение 92
Векторы коллинеарные 58
– компланарные 58, 207
– ортогональные 90, 228
Виета формулы 176
Вращений метод 197, 331
Высота корневого вектора 270

Гамильтона–Кэли теорема 279
Гаусса метод 36
Гаусса–Жордана метод 39
Гипербола 184
Гиперболоид 333, 335, 336
Гиперболы асимптоты 186
– ветви 185
– директрисы 187
– каноническое уравнение 185
– полуоси 185
– фокальный параметр 192
– фокусы 184
– эксцентриситет 186
Гиперплоскость 82
Гиперповерхность второго порядка 325
Гомоморфизм групп 147
Грама–Шмидта процесс ортогонализации 230
Группа 135
– абелева 135
– знакопеременная n-го порядка 141
– конечная 140
– невырожденных треугольных матриц 138
– ортогональных матриц 138
– симметрическая n-го порядка 141
– циклическая 142

Декартово произведение 43
Деление отрезка в данном отношении 85
Делители нуля 150
Дополнение множества 43
Дополнительное подпространство 220
Дополнительный минор 31

Евклида алгоритм 169
Евклидово пространство 224
Единичные строки (столбцы) 21

Жордана метод 39
Жорданова клетка 265
– форма 277

Задача о перпендикуляре 234
Закон инерции 316
Закон композиции внутренний 50
– – внешний 53

Изометрия 239
Изоморфизм групп 145
– евклидовых (унитарных) пространств 239
– колец 152
– линейных пространств 213
– полей 152

Инвариантное подпространство 254
Инварианты гиперповерхности второго порядка 327
– линий второго порядка 194
Инверсия 25
Индекс инерции квадратичной формы 315
Индекс нильпотентности 266

Каноническая пара базисов 248
Квадратичная форма 310
– – вырожденная 311
– – знакоопределенная 316
– – положительно определенная 316
– – эрмитова 319
Квадратичной формы канонический вид 311
– – закон инерции 316
– – матрица 311
– – приведение к главным осям 322
– – ранг 311
– – сигнатура 315
Класс вычетов 46
– смежный 139
– эквивалентности 44
Кольцо 148
– вычетов 150
– коммутативное 149
Комплексная плоскость 158
Комплексные числа 156
Комплексного числа алгебраическая форма 157
– – аргумент 160
– – модуль 160
– – тригонометрическая форма 161
Конические сечения 337
Конус 328, 337
Координатный столбец 78
Координаты вектора 78, 83
– точки 84
– – полярные 101
– – сферические 103
– – цилиндрические 102
Корень n-й степени из комплексного числа 162
– из оператора 301
Корень многочлена 170
– – первообразный 164
Корневое подпространство 270
Корневой вектор 270
Коши–Буняковского неравенство 226
Крамера правило 106
Кратность корня многочлена 176
– собственного значения алгебраическая 261
– – – геометрическая 261
Кронекера–Капелли теорема 106
Кронекера символ 228
Куранта–Фишера теорема 359
Кэли теорема 146

Лагранжа метод 205, 313
– теорема 141
Лапласа теорема 31
Линейная зависимость 65
– комбинация 65
– оболочка 215
– форма 240, 248
Линейное подпространство 80
– – инвариантное 254
– – корневое 270
– – собственное 261
Линейное пространство вещественное 62
– – арифметическое 62, 207
– – бесконечномерное 77
– – геометрическое 62
– – комплексное 207
– – конечномерное 77
– – над произвольным полем 207
Линейное многообразие 81
Линейного многообразия вектор сдвига 81
– – направляющее подпространство 81
– – нормальный вектор 236
– – размерность 82
Линейного оператора дефект 247
– – жорданов базис 277
– – матрица 242
– – образ 246
– – определитель 251
– – разложение сингулярное 306
– – разложение полярное 307
– – разложение эрмитово 302
– – ранг 247
– – сингулярные числа 305
– – след 258
– – характеристический многочлен 257
– – ядро 246
Линейный оператор 240
– – вырожденный (невырожденный) 252
– – дифференцирования 240
– – индуцированный 256
– – кососимметрический 301
– – косоэрмитов 301
– – неотрицательно определенный 298
– – непрерывный 352
– – нильпотентный 266
– – нормальный 288
– – обратный 251
– – ограниченный 352
– – ортогональный 292
– – отражения 241
– – положительно определенный 298
– – проектирования 241
– – простой структуры 261
– – самосопряженный 297
– – симметрический 297
– – сопряженный 284
– – унитарный 292
– – эрмитов 297
Линейный функционал 240, 248
Линейных подпространств пересечение 216
– – сумма 216
– – – прямая 218
Линия алгебраическая 116
Линии алгебраической порядок 116
Линии второго порядка на плоскости общее уравнение 193
– – – – – канонические уравнения 200
– – – – – приведенные уравнения 200

Матриц произведение 19
– равенство 18
– сумма 18
Матрица 15
– блочная 17
– вырожденная 37
– Грама 232
– единичная 16
– квадратная 15
– квазидиагональная 18
– квазитреугольная 18
– кососимметрическая 301
– кососэрмитова 301
– нормальная 288
– нулевая 15
– обратная 36
– ортогональная 96
– перехода к другому базису 79
– положительно определенная 299
– присоединенная 37
– прямоугольная диагональная 40
– простой структуры 263
– самосопряженная 296
– симметрическая 296
– скалярная 16
– сопряженная 159
– столбцовая (строчная) 16
– ступенчатая 16
– транспонированная 20
– трапециевидная 17
– треугольная 16
– унитарная 291
– эрмитова 296
Матрицы главная диагональ 15
– жорданова форма 278
– конгруэнтные 311, 320
– норма 357
– определитель 27
– побочная диагональ 315
– ранг 71
– след 16
– собственное значение 256
– собственный вектор 256
– эквивалентные 74
Матрицы характеристический многочлен 194, 257
Матрицы ортогонально (унитарно) подобные 290
– перестановочные (коммутирующие) 20
– подобные 195
– элементарных преобразований 24
Матрицы LU-разложение 41
– сингулярное разложение 306
– скелетное разложение 76
– QR-разложение 231
Метрика 237
Метрическое пространство 237
Минор 31
– базисный 71
– главный 194
– дополнительный 31
– угловой 41
Многочлен n-й степени 165
– аннулирующий 279
– минимальный 279
– от оператора 251
– симметрический 177
– характеристический 194, 257
Многочлена делитель 169
– каноническое разложение 175, 179
– корень 170
Многочленов деление 168
– наибольший общий делитель 169
– сложение 166
– умножение 166
Множеств декартово произведение 43
– объединение 42
– пересечение 42
– равенство 42
– разность 43
Муавра формула 162

Направленный отрезок 55
Наименьших квадратов метод 367
Направляющие косинусы 90
Неизвестные главные 107
– свободные 107
Нейтральный элемент 51
Неравенства треугольника в евклидовом (унитарном пространстве) 227
– – на комплексной плоскости 161
Неравенство Гельдера 343
– Минковского 342
– Юнга 342
Нильпотентный оператор 266
Норм эквивалентность 351
Норма вектора 343
– матрицы 357
– евклидова 348
– оператора 354
– подчиненная 354
– согласованная 353
– спектральная 354
Нормы Гельдера 344
Нормальное решение 365
– уравнение 367
Нормальный делитель 144
– оператор 288
Нормированное пространство 342

Обратная операция 52
Общее решение 108, 114, 115
Однородная система 109
Операторное уравнение 364
Операторов алгебра 250
– кольцо 149
– линейное пространство 62, 207
– произведение 245
– сумма 244
– – прямая 268
Определитель 27
– Грама 232
Определителя разложение по строке 34 (столбцу) 34
– член 28
Ориентация в вещественном пространстве 91
Ортогональное дополнение 233
Ортогональные векторы 90, 228
Основная теорема алгебры 171
Основной процесс 23
Отношение бинарное 43

– эквивалентности 44
Отображение 46
– биективное 46
– инъективное 46
– линейное 240
– обратное 48
– сюръективное 46
– тождественное (единичное) 47
Отображений равенство 47
– произведение (суперпозиция) 47

Пара квадратичных форм 323
Парабола 187
Параболы вершина 188
– директриса 187
– каноническое уравнение 188
– ось 188
– фокальный параметр 187
– фокус 187
– эксцентриситет 187
Параболоид гиперболический 338
– эллиптический 338
Перестановка 25, 49
Перестановки транспозиция 25
– четность 25
Поверхность алгебраическая 116
Поверхности алгебраической второго порядка канонические уравнения 333
– – – – общее уравнение 329
– – – – приведенные уравнения 330
Подгруппа 137
Подкольцо 151
Подстановка 49
Подполе 152
Поле 151
– алгебраически замкнутое 170
– вычетов по простому модулю 154
Поля характеристика 153
– расширение 152
Полуплоскость 126
Полупространство 126
Порядок группы 139
– элемента 143
Преобразование линейное 240
Пространство евклидово 224
– линейное 62, 207
– метрическое 237
– нормированное 342
– унитарное 224
Процесс ортогонализации 230
Прямая сумма операторов 268
– – подпространств 218
Псевдорешение 366
– нормальное 367
Пучок плоскостей 126
– прямых 125

Радиус-вектор точки 84
Разложение вектора по системе векторов 65
– – – подпространствам 216
Размерность алгебры 250
– аффинного пространства 209
– линейного пространства 77
– – многообразия 82
Ранг билинейной формы 310
– квадратичной формы 311
– матрицы 71
– оператора 247
– системы векторов 211
Расстояние в метрическом пространстве 237
– между скрещивающимися прямыми 134
– от точки до прямой 128, 133
– – – – плоскости 128
Расширение кольца 151
– поля 152

Сильвестра критерий 317
Симметричный элемент 51
Сингулярное разложение 306
Сингулярные векторы 305
– числа 305
Сингулярных чисел разделение 361
Система координат аффинная 84
– – общая декартова 84
– – прямоугольная декартова 86
Система линейных алгебраических уравнений 104
– – – – совместная (несовместная) 104
– – – – определенная (неопределенная) 104
Скалярного произведения общий вид 318, 321
Скалярное произведение 88, 224
Смешанное произведение 93
Собственное значение (собственный вектор) 256, 263
– подпространство 261
Собственных значений разделение 361
– – экстремальные свойства 358
Сопряженное число 157
– пространство 249
Сопряженные элементы группы 144
Сопряженный оператор 284
Сужение оператора 256
Сфера 345, 347
Сходимость по норме 346

Тождество параллелограмма 227, 350

Углы Эйлера 99
Угол между векторами 88, 227
– – прямыми 128, 133
Уравнение операторное 364
– сопряженное 365
Уравнения прямой на плоскости 117–123
– – в пространстве 129–130
– плоскости 119–123

Фактор-множество 45
Фактор-группа 145
Фактор-пространство 223
Фредгольма альтернатива 365
– теорема 365
Формулы преобразования координат 96
Фундаментальная система решений 112

Функционал невязки 366

Характеристика поля 153
Характеристическое уравнение 259

Цилиндр 339

Шаля лемма 57
Шар 345, 347
Шура базис 289
– теорема 289

Эквивалентные матрицы 74
– системы векторов 211
– – уравнений 105
Элемент наилучшего приближения 361
Элементарные преобразования матрицы 22
– – системы уравнений 111
Эллипс 180
Эллипса директрисы 183
– каноническое уравнение 182
– оси 182
– полуоси 182
– фокальный параметр 192
– фокусы 180
– эксцентриситет 182
Эллипсоид 334

Ядро гомоморфизма 148
– оператора 246
Якоби сигнатурное правило 316
– формулы 315

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – множества натуральных, целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел.

$A^T = (a_{ij}^t)$ – транспонированная матрица к матрице $A = (a_{ij})$.

$A^H = (a_{ij}^h)$ – сопряженная матрица к матрице $A = (a_{ij})$.

$\widehat{A}$ – присоединенная матрица к матрице A.

$\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} \mathcal{A}$ – след матрицы A и оператора $\mathcal{A}$ соответственно.

$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на главной диагонали.

$\det A$, $\det \mathcal{A}$ – определитель матрицы A и оператора $\mathcal{A}$ соответственно.

$M_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ – минор, расположенный в строках с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_k$.

(AB) – прямая, проходящая через точки A и B.

$[AB)$ – луч с началом в точке A, на котором расположена точка B.

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

$pr_l^L \mathbf{a}$ – проекция вектора $\mathbf{a}$ на прямую l параллельно прямой L.

$pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ – ортогональная проекция вектора $\mathbf{b}$ на ось, определенную вектором $\mathbf{a}$.

$e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис линейного пространства, состоящий из векторов $e_1, \ldots, e_n$.

x_e – координатный столбец вектора x в базисе e.

$G(a_1, \ldots, a_k)$ – матрица Грама системы векторов $a_1, \ldots, a_k$.

$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ – линейная оболочка системы векторов $a_1, \ldots, a_k$.

A_{f_e} – матрица оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e и f.

$\mathcal{L}(V, W)$ – множество всех линейных операторов, действующих из пространства V в пространство W.

Для сокращения используются также стандартные логические символы импликации и кванторы:

запись $A \Longrightarrow B$ читается как "из высказывания A следует высказывание B";

запись $A \Longleftrightarrow B$ означает эквивалентность высказываний A и B и читается как "для A необходимо и достаточно B" или "A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B";

текст в фигурных скобках в записи $A \Rightarrow \{\ldots\} \Rightarrow B$ содержит комментарии к переходу от высказывания A к высказыванию B;

квантор $\forall$ читается как "для любого";

квантор $\exists$ читается как "существует".

·ПРОСПЕКТ·

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСПЕКТ»
111020, Москва, ул. Боровая, д.7, стр.4
(495) 967-1572
e-mail: mail@prospekt.org
www.prospekt.org

КНИГОТОРГОВАЯ ГАЗЕТА

ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

ИНТЕРНЕТ-ВЕРСИЯ ГАЗЕТЫ
WWW.BOOK.RU

- НОВОСТИ КНИЖНОГО МИРА
- ОСВЕЩЕНИЕ АКТУАЛЬНЫХ ВОПРОСОВ РАЗВИТИЯ КНИЖНОЙ ИНДУСТРИИ
- АКЦЕНТ НА ПРОБЛЕМАХ РЕГИОНАЛЬНОЙ КНИЖНОЙ ТОРГОВЛИ
- ОБЗОР КНИЖНЫХ НОВИНОК И РЕЦЕНЗИИ НА КНИГИ

ПОДПИСКА
- ПО КАТАЛОГУ «РОСПЕЧАТИ» (ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС- 25787)
- ЧЕРЕЗ АГЕНТСТВО «ИНТЕР-ПОЧТА»

(КУРЬЕРСКАЯ ДОСТАВКА ПО МОСКВЕ: ТЕЛ. – (495) 500-0060)

Адрес: 129110, г. Москва, ул. Большая Переяславская, д. 46
Тел./факс: (495) 680-7254, 680-9106, 680-9213
680-1278, 680-0671
E-mail: gazeta@knorus.ru

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Книга представляет собой учебник по объединенному курсу линейной алгебры и аналитической геометрии, в основу которого легли лекции, читавшиеся авторами в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. В изложении материала, вполне традиционного по своей тематике, авторы придерживаются тенденций объединения двух математических дисциплин в одну, добиваясь лаконичности геометрических доказательств и наглядности алгебраических абстракций. Наряду с традиционными темами книга содержит сведения из общей алгебры, элементы теории множеств, метрических и нормированных пространств. Особое внимание уделяется вычислительным аспектам алгебраических методов.

Для студентов университетов и вузов, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика», «Информатика».